

奇数の完全数

Abstract

Since only even perfect numbers have been discovered so far, we assume that no odd perfect numbers exist and attempt to prove this. (This study is limited to odd numbers from 1 to 100.)

1.概要

現在、偶数の完全数は、 $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ として表すことができることが証明されているが、奇数の完全数はまだ見つかっておらず、存在しないことも未証明である。私たちは1から100までの奇数を対象として完全数でない数学的裏付けを作り、さらにそれを大きな数まで範囲を広げたときに応用できるかどうかを考えた。

2.方法

完全数である条件は $\sigma(N)=2N$ である

①素数

Nを奇素数とする

$\sigma(N) \neq 2N$ であるため完全数ではない

これにより消去できる数:

3.5.7.11.13.17.19.....97 → 24 個

②累乗数

累乗数の約数の総和は等比数列の和の公式より、 $N = r^{n-1}$ とすると、(rは奇素数、nは自然数) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ と表すことができ、これは $2N < S_n$ となるので不適。

※平方数は個別で以下のように証明できる

奇数の平方数の約数→奇数

平方数の約数の個数→奇数個

よって $\sigma(N) \neq 2N$ (偶数にならないため)

これより、1.9.25.27.49.81 → 6 個が完全数でないことが示された

③素数*素数

奇数完全数Nが異なる2つの奇素数p,qで表せると仮定すると、その約数の総和は $(1+p)(1+q)$ で表される。この時、p,qは素数なので $(1+p)$ と $(1+q)$ は4の倍数になる。一方で奇数の完全数の約数の総和は $2N$ で表される。この時Nは奇数なので、 $2N$ は4の倍数でない2の倍数になる。これは矛盾。よって奇数完全数Nは素数×素数で表すことができない。

これにより消去できる数...15,21,33,35,39...95 → 17 個

④(素数)ⁿ × (素数)ⁿ

約数の総和を表す関数 $\sigma(n)$ は乗法的であるため、 $N = p^a q^b$ に対して

$$\sigma(N) = \sigma(p^a) \sigma(q^b)$$

が成り立つ。

ここで素数冪の場合の公式

$$\sigma(p^a) = 1 + p + \dots + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$$

を用いると、

$$\frac{\sigma(p^a)}{p^a} = \frac{p^{a+1} - 1}{p^a(p - 1)} < \frac{p^{a+1}}{p^a(p - 1)} = \frac{p}{p - 1}, \quad \frac{\sigma(q^b)}{q^b} < \frac{q}{q - 1}$$

したがって完全数の条件 $\sigma(N) = 2N$ において、

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \frac{\sigma(p^a)}{p^a} \cdot \frac{\sigma(q^b)}{q^b} < \frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1}$$

ここでp,qはともに奇素数で $p \geq 3, q \geq 5$ とすれば、

$$\frac{p}{p - 1} \leq \frac{3}{2}, \quad \frac{q}{q - 1} \leq \frac{5}{4}$$

ゆえに、

$$\frac{\sigma(N)}{N} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$$

これは $\sigma(N) < 2N$ であり、Nが完全数であるという仮定($\sigma(N) = 2N$)に矛盾する。

3.結果

1から4までの集合に1から100までの奇数すべてが包括されているため設定した範囲すべて完全数ではないことが証明された。

また範囲を1から1000、1から10000までの奇数に広げると

1から1000→89%消去

1から10000→75%消去

となりまだ示した集合の範囲が不完全だと結論できる。

4.考察、結論

数論におけるオイラーの定理より奇数の完全数の条件として

素因数を3つ以上持つことが証明されている。私たちが証明した集合は素因数を3つ以上持っていないため完全数ではない事は明らかだった。素因数を3つ以上持つような数を対象として、奇数の完全数でない証明を行うことでより正確性が高くなると予想できる。

