線分をz軸の周りに回転させてできる曲面（一葉双曲面）が囲む体積

大阪府立高津高等学校　数学班

1. 問題設定

xyz空間において、２点$A(1,0,0)$, $B(1,0,1)$を両端とする線分を、

点Aを固定し、

①点Bをxz平面内でαだけ傾ける

②続けて点Bをx座標を一定に保ってβだけ傾ける

この線分をz軸まわりに回転させてできる曲面が囲む立体の体積V

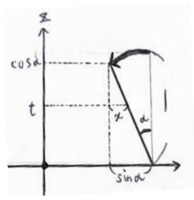
を考察する。

2. 予想（仮説）

①回転軸と線分が平行なとき、体積は最大になる。

②「ねじれの位置」で回転させたときでは、体積が平行なときより小さくなる。

3. 計算①(0<α<π/2, β=0 のとき)



①平面$z=t$での切断面は円。

この円の半径rを相似比を用いて求める。

⇩

②円の半径rから、円の面積は、$\pi(t\cdot\tan\alpha-1)^2$

⇩

③体積V_1は

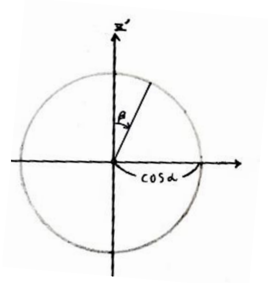
$$V_1=\int_0^{\cos\alpha}\pi(t\cdot\tan\alpha-1)^2\,dt$$

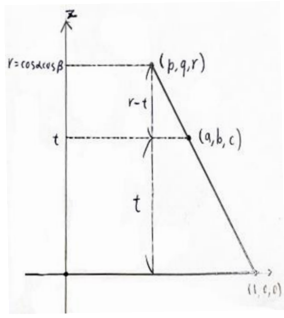
4. 計算②$(0<\alpha<\pi/2, 0<\beta<\pi/2$のとき)

線分をα傾け、さらにx軸を中心にβ傾けた線分の回転体を考える.

①三角比を用いて線分の先端Bの座標を求める

$B(1-\sin\alpha, \cos\alpha\sin\beta, \cos\alpha\cos\beta)=(p,q,r)$とおく。





②内分の公式を用いて(a,b,c)の座標を求める

③三平方の定理より、$z=t$における断面積$\pi r^2=\pi f(t)$を求める。

$$f(t)=\frac{1-2t\cdot\tan\alpha}{\cos\beta}+t^2\cdot\frac{\tan^2\alpha}{\cos^2\beta}+\cdot\tan^2\beta$$

④体積V_2は

$$V_2=\int_0^{\cos\alpha\cos\beta}\pi\{f(t)\}^2\,dt$$

5. 結果

$$V_1=\pi\cos\alpha\left(1-\sin\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)$$

$$V_2=\pi\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{4}{3}-\sin\alpha-\frac{1}{3}\cos^2\alpha\cos^2\beta\right)$$

6. 今後の展望

・V_1が最大になるのは$\alpha=0$のときであることは図形的にほぼ明らかだが、計算で示すのは難しかった。

・αとβをともに変化させて、V_2の最大値を計算する。

・線分の一端ではなく線分の中点を固定したときの最大値を計算する。

7. 引用文献・参考文献

センタ　ホガジャグ.“【ピタゴラ】きょうのスレスレ　～かいてん編～【スターウォーズ】”.Youtube.2016-05-19.
https://www.youtube.com/watch?v=KN5oP0MXKhI

ピタゴラスイッチ.“きょうのスレスレ　かいてんへん　2”.NHK for School.2023-06-20.
https://www2.nhk.or.jp/school/watch/bangumi/?das_id=D0005260297_00000