

カプレカ数の証明

整数の桁を並べ替えて最大値と最小値の差をとったときに、元の整数に等しくなる数をカプレカ数と呼ぶ。
また、整数の桁を並べ替えて最大値と最小値の差をとるという操作をカプレカ操作という。

「3桁のカプレカ数の証明」

3桁の整数 abc が $0 \leq c \leq b \leq a \leq 9$ とし、 a, b, c を並び替えてできる最大の数 $100a+10b+c$ と a, b, c を並び替えてできる最小の数 $100c+10b+a$ を用いて最大値と最小値の差を $(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=99(a-c)$ となったときに、元の整数に等しくなる条件を考える。

- a, b, c の条件を求める
 - (i) $a=b=c$ のとき、最大値と最小値の差は、0 になるから不適。
 - (ii) $c=b=a, c=b<a$ のとき最大値と最小値の差は、 $99(a-c)$ となる。
よって、3桁のカプレカ数は、99の倍数となり、等号は成り立たない。よって不適。
 - (iii) $c<b<a$ が成り立つとき、最大値と最小値の差は、 $99(a-c)$ となり、99の倍数となるから、99の倍数の性質より、十の位は9となり、 $a=9$ が成り立つ。
これらより、 a, b, c について $0 \leq c < b < a \leq 9$ であるとわかる。上記の条件($0 \leq c < b < a = 9$)から、 b, c がそれぞれ百の位、一の位の場合を考える

b が百の位、 c が一の位のとき、 $99(a-c)=100b+90+c \Leftrightarrow 100b+100c=801, 1$ 桁の整数でかつ $b>c$ を満たす b, c は存在しない。よって不適。
 b が一の位、 c が百の位のとき、 $99(a-c)=100c+90+b \Leftrightarrow 199c+b=801$
1桁の整数でかつ $b>c$ を満たす組は $(b, c)=(5, 4)$ のみである。よって、条件より、 $a=9, b=5, c=4$ であるから、3桁のカプレカ数は495のみとなる。

「4桁のカプレカ数の証明」

四桁の整数 $abcd$ を用いて、 $0 \leq d \leq c \leq b \leq a \leq 9$ とし、3桁と同じように定義する。

4桁のカプレカ数の操作を行うと、
 $(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)=999(a-d)+90(b-c)$ となる。

- $a-d$ の値は最小で3、最大で9なので
 $a-d$ は $3 \leq a-d \leq 9$ を満たす整数である。
- $b-c$ も同様にして、
 $1 \leq b-c \leq 7$ を満たす整数である。

$999(a-d)$ は 999の倍数の性質より、千の位は $a-d-1$ 、百の位は9、十の位は9、一の位は $10-a+d$ となる。
また、 $90(b-c)$ は $1 \leq b-c \leq 7$ より、90の倍数の性質より、百の位は $b-c-1$ 、十の位は $10-b+c$ 、一の位は0となる。

よって、 $999(a-d)+90(b-c)$ について

一の位は $10-a+d+0=10-a+d$

十の位は $9+10-b+c=19-b+c$ 繰り上がりするため $9-b+c$

百の位は十の位の繰り上がりより、 $1+9+b-c-1=9+b-c$ 、 $b-c$ は0以上であるため繰り上がる。よって百の位は $b-c-1$

千の位は百の位の繰り上がりより、 $1+a-d-1=a-d$ となる。

これらを用いて場合分けすると、

左	右	左	右
(1) $b-c=1$ のとき	$\square 08 \square$	(a) $a-d=3$ のとき	$3 \square \square 7$
(2) $b-c=2$ のとき	$\square 17 \square$	(b) $a-d=4$ のとき	$4 \square \square 6$
(3) $b-c=3$ のとき	$\square 26 \square$	(c) $a-d=5$ のとき	$5 \square \square 5$ 条件より不適
(4) $b-c=4$ のとき	$\square 35 \square$	(d) $a-d=6$ のとき	$6 \square \square 4$
(5) $b-c=5$ のとき	$\square 44 \square$ 条件より不適	(e) $a-d=7$ のとき	$7 \square \square 3$
(6) $b-c=6$ のとき	$\square 53 \square$	(f) $a-d=8$ のとき	$8 \square \square 2$
(7) $b-c=7$ のとき	$\square 62 \square$	(g) $a-d=9$ のとき	$9 \square \square 1$

左が成り立っている時、右が成り立つかどうかを調べる。

調べると、成り立っているのは、(1),(2),(3),(b),(d),(e),(f),(g)

次に、百の位と十の位の数字の組み合わせと千の位と一の位の数字の組み合わせで成り立つのは、(2)と(d)のときだけであるため、
4桁のカプレカ数は6174となる。