累乗と階乗の関係性
～第二種スターリング数の出現～

数理・自然科学域／数学系
岸和田高校２年

研究の動機

累乗の計算を煩わしく感じ、隣り合う累乗同士で関係性を見つけられたら計算が楽になるのではないかと思ったから。

研究の目的

関係性を試行錯誤で探す中で、幾つかの規則性を見つけた。
これらを式にして一般化し、それを証明、もしくは既存のものかを明らかにすることを目的としている。

研究の方法

◯差分操作

隣り合う累乗同士の差を出し
出た差同士でも差を出す。
指数が n のとき
この操作 n 回目で
全差が **n!** になる。

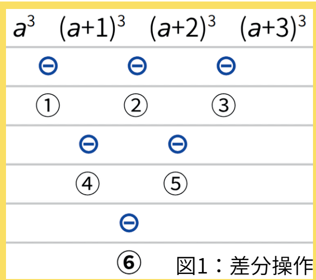

図1：差分操作

2	$+1\cdot a^2$	$-2(a+1)^2$	$+1(a+2)^2$		
3	$-1\cdot a^3$	$+3(a+1)^3$	$-3(a+2)^3$	$+1(a+3)^3$	
4	$+1\cdot a^4$	$-4(a+1)^4$	$+6(a+2)^4$	$-4(a+3)^4$	$+1(a+4)^4$

2	${}_2C_0\cdot 0^2$	$-{}_2C_1\cdot 1^2$	$+{}_2C_2\cdot 2^2$		
3	${}_3C_0\cdot 0^3$	$+{}_3C_1\cdot 1^3$	$-{}_3C_2\cdot 2^3$	$+{}_3C_3\cdot 3^3$	
4	${}_4C_0\cdot 0^4$	$-{}_4C_1\cdot 1^4$	$+{}_4C_2\cdot 2^4$	$-{}_4C_3\cdot 3^4$	$+{}_4C_4\cdot 4^4$

m= 0 ～ n の総和と考えると 、
係数…パスカルの三角形→二項係数 nCm
符号… n = 偶数:＋　n = 奇数:ー で始まり ＋で終わる
n 乗の数… 1 ～ n の n 乗の数
ここから試行錯誤して

$$\sum_{m=0}^{n} {}_nC_m(-1)^{n-m}m^n = n!$$ [1]

第二種スターリング数によって導出される式が出現した。

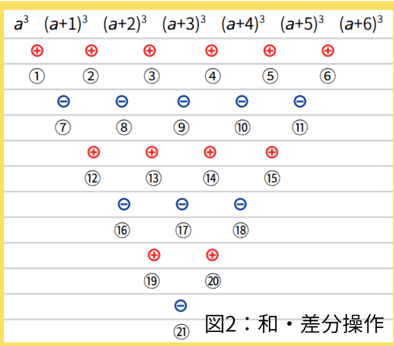

図2：和・差分操作

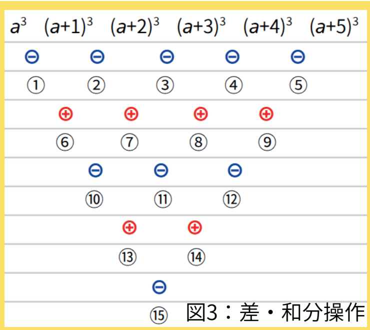

図3：差・和分操作

◯和・差分操作 …先程の和と差ver.　全差が **n!・2ⁿ**

2	${}_2C_0\cdot 0^2$	$-{}_2C_1\cdot 2^2$	$+{}_2C_2\cdot 4^2$		
3	${}_3C_0\cdot 0^3$	$+{}_3C_1\cdot 2^3$	$-{}_3C_2\cdot 4^3$	$+{}_3C_3\cdot 6^3$	
4	${}_4C_0\cdot 0^4$	$-{}_4C_1\cdot 2^4$	$+{}_4C_2\cdot 4^4$	$-{}_4C_3\cdot 6^4$	$+{}_4C_4\cdot 8^4$

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(-1)^{n-r}(2r)^n = n!\cdot 2^n$$

◯差・和分操作 …差と和ver. 全差が **n!・2ⁿ⁻¹**

2	$+{}_1C_0\cdot 0^2$	$-{}_1C_0\cdot 1^2$	$-{}_1C_1\cdot 2^2$	$+{}_1C_1\cdot 3^2$				
3	$-{}_2C_0\cdot 0^3$	$+{}_2C_0\cdot 1^3$	$+{}_2C_1\cdot 2^3$	$-{}_2C_1\cdot 3^3$	$-{}_2C_2\cdot 4^3$	$+{}_2C_2\cdot 5^3$		
4	$+{}_3C_0\cdot 0^4$	$-{}_3C_0\cdot 1^4$	$-{}_3C_1\cdot 2^4$	$+{}_3C_1\cdot 3^4$	$+{}_3C_2\cdot 4^4$	$-{}_3C_2\cdot 5^4$	$-{}_3C_3\cdot 6^4$	$+{}_3C_3\cdot 7^4$

左から第0項とし、偶数項と奇数項で分けて考えた。

・偶数項

$+{}_1C_0\cdot 0^2$	$-{}_1C_1\cdot 2^2$		
$-{}_2C_0\cdot 0^3$	$+{}_2C_1\cdot 2^3$	$-{}_2C_2\cdot 4^3$	
$+{}_3C_0\cdot 0^4$	$-{}_3C_1\cdot 2^4$	$+{}_3C_2\cdot 4^4$	$-{}_3C_3\cdot 6^4$

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k(-1)^{n-k}(2k)^n$$

・奇数項

$-{}_1C_0\cdot 1^2$	$+{}_1C_1\cdot 3^2$		
$+{}_2C_0\cdot 1^3$	$-{}_2C_1\cdot 3^3$	$+{}_2C_2\cdot 5^3$	
$-{}_3C_0\cdot 1^4$	$+{}_3C_1\cdot 3^4$	$-{}_3C_2\cdot 5^4$	$+{}_3C_3\cdot 7^4$

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k(-1)^{n-k+1}(2k+1)^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k(-1)^{n-k}\{(2k)^n-(2k+1)^n\} = n!\cdot 2^{n-1}$$

結果得られた式

$$\sum_{m=0}^{n} {}_nC_m(-1)^{n-m}m^n = n!$$

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r(-1)^{n-r}(2r)^n = n!\cdot 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k(-1)^{n-k}\{(2k)^n-(2k+1)^n\} = n!\cdot 2^{n-1}$$

考察

差分操作の式に和の操作を加え,
和・差分操作を行った結果、2^n が出現し、
差・和分操作を行った結果、2^{n-1}が出現した。
これらのことから、
操作を変化させることで、現れる指数関数の底や指数も
変化するのではないかと考えられる。

今後は、累乗を他の方法で求めることを目的に、
操作を順方向に解析するのみでなく、
この操作によって得られた結果から
元の数列を復元する逆操作が可能かどうか調べ、
可能であれば証明したい。
また、考察から、隣り合う数同士ではなく、
1個飛ばしなどの操作、和と差を交互にしない操作など、
他の多様な操作の考案と一般化を行いたいと考えている。
差・和分操作の証明も今後の課題である。

謝辞

本研究の遂行にあたり、終始多大なご指導を賜った、
兵庫県立大学名誉教授
岸和田高校数学科教諭 に深謝致します。

参考文献

[1]
The Stirling Numbers of the Second Kind and Their Applications.
Alabama Journal of Mathematics. 2024, vol.47, no.1, p.8.