平面上の点のある座標への移動について

北河晴汰　西野安美　松村珠月

$r=(\pm a)^2+(\pm b)^2$(rは自然数,a,bは非負整数)のとき、(x,y)($0\leq x\leq 19, 0\leq y\leq 11$)から($x\pm a, y\pm b$)(符号任意)または($x\pm b, y\pm a$)(符号任意)へ移動できる。また、($0\leq x\pm a\leq 19, 0\leq y\pm b\leq 11$または$0\leq x\pm b\leq 19, 0\leq y\pm a\leq 11$)を満たす。
これらの移動を繰り返すとき(0,0)から(19,0)へ移動できるrの条件はなにか
ただし、$r=(\pm a)^2+(\pm b)^2$を2通り以上のa,bで表せるときそれぞれのa,bのみをもちいた移動に限る
[解答]
($x\pm a, y\pm b$)(符号任意)の移動を合計m回(mは非負整数)行った結果を($x+am_x, y+bm_y$)とおき、
($x\pm b, y\pm a$)(符号任意)の移動を合計n回(nは非負整数)行った結果を($x+bn_x, y+an_y$)とおく
このとき、(0,0)から(s,t)($0\leq s\leq 19, 0\leq t\leq 11$)への移動は

$$am_x+bn_x=s \quad bm_y+an_y=t$$

と表される。ここで、

$$m_x\equiv m_y \pmod 2, n_x\equiv n_y \pmod 2 \cdots ①$$

である。

[1]a,bのどちらか一方が0のとき、
19は素数であるから、(0,0)から(19,0)には$r=19^2$のときのみ移動できる

[2]a,bが自然数のとき
移動できるのがaとbの最大公約数の倍数のみであるから、
19は素数であるためaとbの最大公約数は1または19である必要がある。
また、最大公約数が19では移動ができないので、a,bは互いに素である必要がある。
このとき、(0,0)から(19,0)への移動について考える。

$$am_x+bn_x=19 \quad bm_y+an_y=0 \cdots ②$$

$a\equiv b \pmod 2$と仮定すると、②より$m_y\equiv n_y \pmod 2$であり、①より、
$m_x\equiv m_y\equiv n_x\equiv n_y \pmod 2$となる。
これは$am_x+bn_x=19$に矛盾する。
よって、$a\not\equiv b \pmod 2$である必要がある。

a,bは互いに素であるから、$ka\equiv A \pmod b$　($k\neq 0$)
において、A=0となるまでkを変化させるとき$0\leq A\leq b-1$である。
y座標について考えると、すべてのAで　$a+A\leq 11$　を満たす必要があるので、
$a+(b-1)\leq 11$　すなわち、$a+b\leq 12$を満たす必要がある。

<命題>aとbが互いに素かつ$a\not\equiv b \pmod 2$かつ$a+b\leq 12$を満たすとき、任意の(p,0)($0\leq p\leq 11$)に移動できる。このとき,aを偶数とする。
aが偶数であるから①,②より、m_xは偶数である。$m_x=2m_x'$(m_x'は整数)とおくと、
2aとbは互いに素であり、m_x', n_xは任意の整数であるから、

$$2am_x'+bn_x=p$$

を満たす、m_x', n_xは存在する。また、bが偶数でも同様に考えられる。
また、(0,0)から任意の(p,0)($0\leq p\leq 11$)に移動できるとき、(0,0)から(19,0)に移動することもできるので、このrの条件で(0,0)から(19,0)へ移動することができる。