封筒のパラドックス

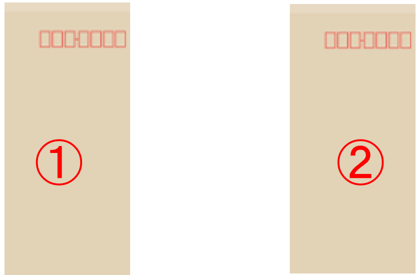
問題の概要

以下のようなゲームがある。目の前に２つの封筒がある。一つにはある金額が入っており、もう一方の封筒にはその金額の２倍、または半分の金額が入っている。どちらか一つを選び、中身を確認した後、その封筒をもらうか、もう一方の封筒に変えるかを決める。このとき、変えたときに貰える金額の期待値は、必ず大きくなってしまう。これは、私達の直感に反する。

先行研究と研究の概要

このパラドックスの原因として金額の上がり幅が下がり幅の２倍となることだとされている。そこで私達は封筒を変える際に料金が発生するように設定し、封筒の数や、封筒中の金額など様々な条件を変えることでパラドックスの解消と期待値の一般化を目指す。

問題の説明



1000円

500円
or
2000円

①の封筒を引いて中の金額が1000円だったときは左図のように②は500円か2000円のどちらかとなり、変えなかったときの期待値は1000円、変えたときの期待値は$500\times1/2+2000\times1/2=1250$となり、変えたときのほうが大きくなる。

※これは封筒の数を増やしたときも同様である。

使用する文字の定義

- 最初に引いた金額をx円とする。（$x>0$）
  つまり、２つの封筒の場合金額の組み合わせは（$x,2x$）または($1/2x,x$)となる。
- 封筒を変える際に発生する料金は変える前の封筒に入っている金額のa倍の金額とする。（$0<a<1$）
- 以下封筒の数が３つのときも登場するが封筒を変えることができる回数は封筒の個数と同じ回数とする。
- また、封筒の個数を増やすと増えた封筒の中は増やす前の封筒の中の最高額の2倍となる

研究結果

封筒2つのとき

（ i ）0回変える＝x
（ ii ）1回変える＝$5x/4-ax$
（ iii ）2回変える＝$x-9ax/4$

封筒3つのとき

（ア）封筒を０回変えるとき　期待値は x

（イ）封筒を１回変えるとき

$x\to2x$ ： $[⅓\times½]\times(2x-ax)=(2x-ax)/6$
： ：

同様にこのときの期待値は$1/6\times(37x/4-6ax)=(37-24a)x/24$

（ウ） 封筒を２回変えるとき

$x\to2x\to x$ ： $[⅓\times(½)^2]\times(x-5ax)=(x-5ax)/12$
： ：

同様にこのときの期待値は$1/12\times(61x/4-61a/2)=(61-122a)x/48$

（エ）封筒を３回変えるとき

$x\to2x\to x\to2x$ ： $[⅓\times(½)^3]\times(2x-4ax)=(2x-4ax)/24$
$x\to2x\to x\to4x$ ： $[⅓\times(½)^3]\times(4x-4ax)=(4x-4ax)/24$
： ：

同様にこのときの期待値は$1/24\times(135x/4-183ax/2)=(135-366a)x/96$

$x\to2x$: $(2x-ax)$
$x\to4x$: $(4x-ax)$

$x\to x/2$: $(x/2-ax)$
$x\to2x$: $(2x-ax)$

$x\to x/2$: $(x/2-ax)$
$x\to x/4$: $(x/4-ax)$

$[(2x-ax)+(4x-ax)+(x/2-ax)+(2x-ax)+(x/2-ax)+(x/4-ax)]\div6=(37-24a)x/24$

考察

①aの係数の絶対値に着目すると封筒を
　１回変えるとき　24/24　＝1
　２回変えるとき　122/48　≒ 2.54
　３回変えるとき　366/96　≒ 3.81
　上のようになるので封筒を変える回数を増やすごとにaの係数の絶対値は約1.4ずつ増えるのではないか。

②(イ),(ウ),(エ)それぞれの期待値が最初に引いたx円（$0<x$）と等しくなるときのaを調べた。
　(イ) $a=13/24\fallingdotseq0.54167$
　(ウ) $a=122/13\fallingdotseq0.10656$
　(エ) $a=122/13\fallingdotseq0.10656$
　(ウ),(エ)のときのaが一致したのでこの規則が成り立つなら封筒４つの時に計算を簡略化できるのではないか

今後の展望

結果でなぜ、最初に引いた値と期待値がおなじになるようにしたときの(ウ)(エ)のaの値が等しくなるか調べる。封筒が３つのときの期待値は求められたので、計算方法を簡略化し、封筒が4つ以上のときの期待値も求め、期待値を求める式の一般化を目指す。