連続する2整数の総試行回数の関係からのコラッツ予想の考察

大阪府立高津高等学校　数学班

研究概要

コラッツ予想とは、自然数について定義され、奇数なら3倍して1足し,偶数なら2で割るという操作を繰り返し、計算の途中で1→4→2→1というループに必ず入るという予想である。ここで、任意の数から始めて、初めて１に到達するまでの操作の回数を「総試行回数」とする。本研究では、連続する2整数の総試行回数に注目し、どのような場合にどのような条件を満たすのかを検討することで、この問題の解決への糸口を探る。

使用する文字について、特に指定がない場合は自然数であるとする

1からの逆算

$1 \leftarrow 2^n \leftarrow \frac{2^n-1}{3}$

$\frac{2^n-1}{3}$ は奇数より

$\frac{2^n-1}{3}=2a-1$

$2^n=6a-2$

ここで3を法とすると

$(-1)^n \equiv 1$

∴n=2m

考えるべき数字は2^{2m}のみでよいことが分かった

逆算の拡張

kを奇数,nを非負整数とし自然数を $k\cdot 2^n$ と表す

$k\cdot 2^n \leftarrow \frac{k\cdot 2^n-1}{3}$

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}$ は奇数より

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}=2b-1$

$k\cdot 2^n=2(3b-1)$

∴n≧1

nは非負整数より

nは自然数としてよい

$k\cdot 2^n=6b-2$

ここで3を法とすると

$k\cdot(-1)^n\equiv 1$

∴(k,n)=

(6p-5,2q)(6p-1,2q-1)

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}\to k\cdot 2^n \to k$

現試行回数:(n+1)回

次に $\frac{k\cdot 2^n-1}{3}-1=\frac{k\cdot 2^n-4}{3}$

について考察する

$\frac{k\cdot 2^n-4}{3}$ からkまでの現試行回数が(n+1)回のとき、連続する2整数の総試行回数は等しくなる

n=1のとき

k≠5(p≠1)のとき

$\frac{2k-1}{3}\to 2k\to k$

現試行回数2回

$\frac{2k-4}{3}\to\frac{k-2}{3}\to k-1$

現試行回数2回

連続する2整数の総試行回数が等しくなるためには、連続する2整数の総試行回数が等しい必要がある

→嬉しくない

k=5(p=1)のとき

3→10→5→16→8→4→2→1　総試行回数7回

2→1　総試行回数1回

$\frac{k-2}{3}$ が1となってしまうようなkの値のとき、一般化に当てはまらない数字が出てくることもある

n=1のとき、k=5(p=1)で一般化から外れる

n=2のとき

k≠1(p≠1)のとき

$\frac{4k-1}{3}\to 4k\to k=6p-5$

現試行回数3回

$\frac{4k-4}{3}=8p\to p$

現試行回数3回

pは任意の自然数なので、これ以上操作を行うと場合分けが膨大になる

→現実的ではない

k=1(p=1)のとき

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}=1$

$\frac{2k-4}{3}=0$

ともに試行しないので、総試行回数0回で等しい

n=4のとき

k≠1(p≠1)のとき

$\frac{16k-1}{3}\to 16k\to k$

現試行回数5回

$\frac{16k-4}{3}\to\frac{4k-1}{3}\to 4k\to k$

現試行回数5回

k≠1のとき、以下で示すn=3,n≧5の場合と同じように示すことができる

k=1(p=1)のとき

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}=5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$

総試行回数5回

$\frac{k\cdot 2^n-4}{3}=4\to 2\to 1$

総試行回数2回

$\frac{k\cdot 2^n-4}{3}$ が2の冪乗になるとき一般化から外れる

n=3,n≧5のとき

$\frac{k\cdot 2^n-1}{3}\to k\cdot 2^n\to k$

現試行回数(n+1)回

$\frac{k\cdot 2^n-4}{3}\to\frac{k\cdot 2^{n-2}-1}{3}\to k\cdot 2^{n-2}\to k$

現試行回数(n+1)回

kにたどり着く試行回数が等しいため、連続する2整数の総試行回数は等しいと予想される

結論・展望

連続する2整数の総試行回数が等しくなるような条件を導くことができたしかし、これらの結論はコラッツ予想が成立する前提での話なので、コラッツ予想の解決には至らないであろう

今後は疑似コラッツ予想のプログラミングを使用したり、今回とは別角度からの考察をして、コラッツ予想の解決の糸口を探る