魔方陣の三次元への拡張

数学探求　六班
鳥谷越千咲　野村優斗　松下纏

1.研究動機

探求の授業にて、今年の富田林中学校入学者選抜(算数的問題)の問題を解く機会があった。
そこに魔方陣の問題があり、それをもっと深くまで研究したいと考え、本研究を行った。

2.研究内容

研究目標

本研究の目標は「平面である魔方陣を三次元に拡張したもの(以下、立方陣)について、その性質を明らかにすること」である。

立方陣の定義

※本研究では「一列のマスの数が 3 である」「1 からマスの総数までの数字を一つずつ過不足なく用いる」の二つの条件を満たす魔方陣・立方陣について考える。

そもそも魔方陣とは、
「３×３の正方形の方陣に数字を配置し、縦・横・対角線のいずれの列についても、その列の数字の合計が同じになるもの」である。
それにならい、立方陣の定義を
「３×３×３の立方体の方陣に数字を配置し、縦・横・奥・対角線のいずれの列についても、その列の数字の合計が同じになるもの」と定めたい。

しかしこの条件を満たす立方陣は存在しないことが知られている。
そこで今回は条件を緩め、次のような定義について考えることにした。
「３×３×３の立方体の方陣に数字を配置し、その中に存在する３×３のいずれの面についても、その面の数字の合計が同じになるもの」

立方陣を考えるにあたって

立方陣の性質を考えるためにまず、立方陣を数式として表したい。

立方陣のマスそれぞれに当てはまる数を a1,a2,…,a27 とする(1)と、立方陣の定義から
a1+a2+…+a8+a9=42
a10+a11+…+a17+a18=42 等が言える。

しかしこれを使って計算するのは、「書くのが大変」「マス同士の位置関係がわかりづらい」といった理由から得策ではない。
そこで(2)の表記方法を用いることにした。

立方陣の例

条件に合致する立方陣は存在し、例えば
a1,a2,…,a26,a27=16,6,20,23,10,9,3,26,13,24,11,7,1,27,14,17,4,21,2,25,15,18,5,19,22,12,8 があげられる(3)。
この他にもいくつか見つかっているが、魔法陣とは違い、中心のマスの値 a14 が一つに定まらない。

3.今後の展望

1. 魔方陣の中心のマスの値が 5 に定まっているように、立方陣の中心のマスの値 a14 にも何かしらの条件があるのではないかという仮説が立った。
その仮説の真偽を確かめる。

2. 魔方陣と立方陣を比較することによって、魔法陣を四次元に拡張したものについても、その性質を考察する。