# 3次元以上のマルバツゲーム

大手前高校

## 〈導入〉

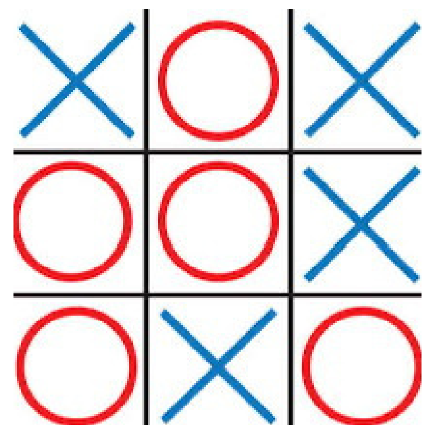
二次元（平面）でも三次元（立体）でも同一直線上に３つ揃えば勝つことができる

↓

次元を増やすごとに置ける数とビンゴにできるパターン数が増える

↓

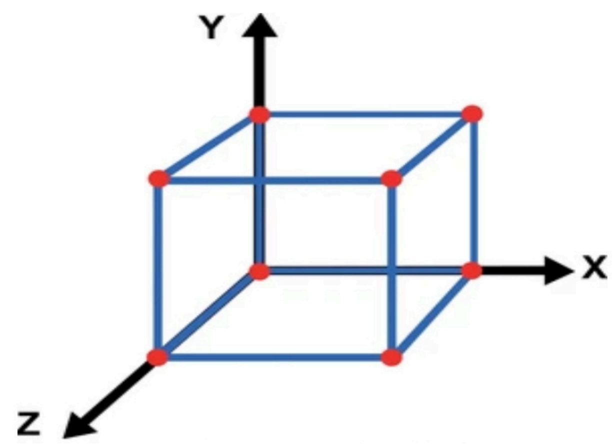
どんどん先手が有利になっていくのでは？



## 〈アイデア〉

### ①座標を用いる

マルバツゲームのマスを点として捉え、3次元だとx,y,zの座標がそれぞれ-1か0か1になるようにする




### ②マスの分類

1番中心のマスを基準点（０，０，...,0）とし、それを0番目のマスと呼ぶことにする。0番目からの距離が1のマスを1番目のマス、距離が√２のマスを２番目のマス、距離が√rのマスをr番目のマスと呼ぶことにする。

### ③マスの価値

3次元の場合

| | |
|---|---|
| 0番目のマス | 13通り ← 作れるビンゴの数が多いからマスの価値が高い |
| 1番目のマス | 4通り |
| 2番目のマス | 5通り |
| 3番目のマス | 7通り |

### ④ビンゴの定義

次の条件を満たすものをビンゴとする

・ビンゴとなる3点の座標がそれぞれの軸で{1,1,1} {0,0,0} {-1,-1,-1} {-1,0,1} {1,0,-1}の内のいずれかの値となる

3点A,B,Cがビンゴとなる例

A(1,0,1,-1)

B(1,0, 0,0)

C(1,0,-1,1)

ただし3点は同じ座標にはならない

### ⑤ビンゴの数

n次元における中心からの距離がr番目のある一つの点をpとすると

pの座標はp(1,・・・,1,0,・・・,0)と表せる

またこのとき、1はr個あり、0はn-r個ある

pと共にビンゴを作る２つの点をq,rとする(qとrは同じ値をとることもある)

pが3点の中心の場合

q(1,・・・,1,1or0or-1,・・・,1or0or-1)

p(1,・・・,1,　0　,・・・,　0　)

r(1,・・・,1,-1or0or1,・・・,-1or0or1)

このときpを通って作れるビンゴの数は $\frac{3^{n-r}-1}{2}$ 個

pが3点の中心以外の場合

p(1　,・・・,1　,0,・・・,0)

q(1or0 ,・・・,1or0 ,0,・・・,0)

r(1or-1,・・・,1or-1,0,・・・,0)

このときpを通って作れるビンゴの数は $2^n-1$ 個

よってn次元における中心からの距離がr番目の点の作れるビンゴの数は

$$\frac{3^{n-r}-1}{2}+2^n-1$$ 個

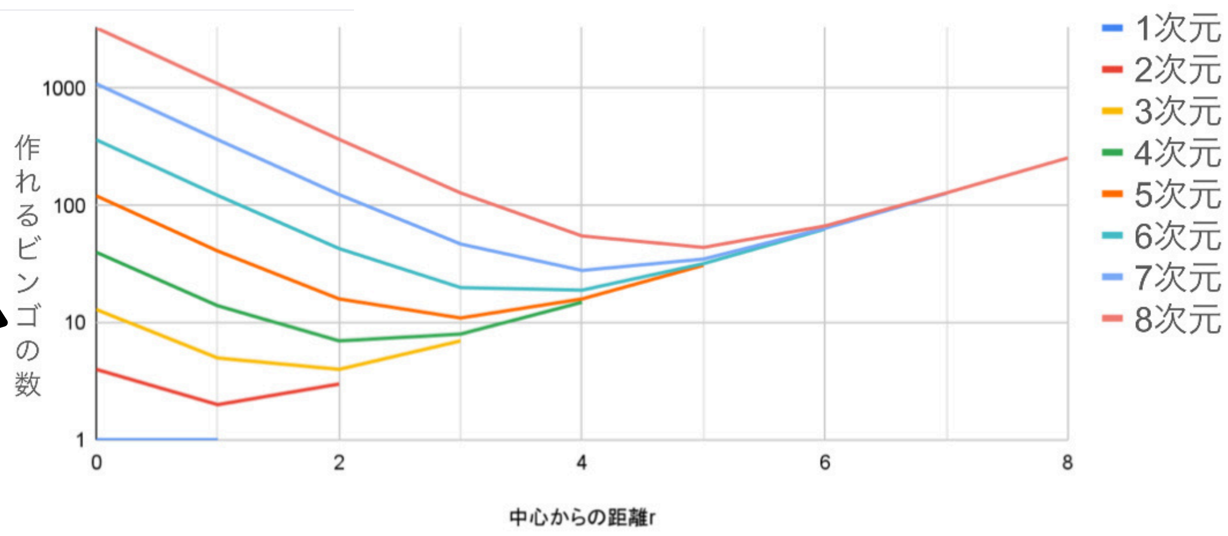
## 〈ビンゴの数からわかること〉

次元数

| 中心からの距離 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | 13 | 40 | 121 | 364 | 1093 | 3280 |
| 1 | | 1 | 2 | 5 | 14 | 41 | 122 | 365 | 1094 |
| 2 | | | 3 | 4 | 7 | 16 | 43 | 124 | 367 |
| 3 | | | | 7 | 8 | 11 | 20 | 47 | 128 |
| 4 | | | | | 15 | 16 | 19 | 28 | 55 |
| 5 | | | | | | 31 | 32 | 35 | 44 |
| 6 | | | | | | | 63 | 64 | 67 |
| 7 | | | | | | | | 127 | 128 |
| 8 | | | | | | | | | 255 |

← 各次元で作れるビンゴの数

各次元の中心からの距離ｒのマスが作るビンゴの数




## 〔まとめ〕

- ビンゴの作り方で考えたとき、ビンゴに多く関わるマスを選択するほど勝ちに近づく
- ０番目のマスからの距離で識別したときその次元のマスの個数がわかる
  また、それぞれのマスのビンゴに関わる数がわかる
- 高次元なほど先手が有利になる

## 〔今後の展望〕

- 高次元になっていくとき、後手で勝利するのに必要な条件を調べる