数学2班

正の約数の総和の研究

research of the sum of positive divisors

研究の目的(動機)

私達は整数について興味があり、私達の数式を世に知ってほしいという思いがありました。そして、私達の先輩方の過剰数についての研究の発表を拝見し、過剰数ではなく不足数について研究をするのは良いのではないかと思い研究を始めました。

前提知識

前提知識 (以下出てくる文字はすべて自然数である)

・正の約数の総和　整数 n の正の約数をすべて足したもの

これを $\sigma(n)$であらわす

ex) $\sigma(8)=1+2+4+8=15$

・完全数について『$\sigma(p)=2p$』となるpのことを完全数という

ex) $\sigma(6)=(2+1)(3+1)=12=2\cdot 6$

・不足数について『$\sigma(k)=2k-m$』となるkのことを不足数という

また、以下、上のような不足数を第 m 不足数とする

ex) $\sigma(50)=(1+5+25)(1+2)=93=2\cdot 50-7$

研究の方法

①PCに1から2000までの数字を過剰数、完全数、不足数に分類した。

②1から2000までの中のすべての不足数を洗い出し、スクリーンショットする。

③スクリーンショットより規則性がないか調べる。

研究結果 1 『2^nが第1不足数 (nは自然数とする)』となる。

作った表から第 1不足数をみてみるとすべて 2^nだった →1,2,4,8,16,32…

そこで、『$k=2^n$(nは自然数)のとき$\sigma(k)=2k-1$』が成り立つと予想。

証明

$\sigma(k)=2k-1$を式変形した『$2k-\sigma(k)=1$』を示す。

(左辺)$=2\cdot 2^n-(1+2+2^2+2^3+\dots+2^{n-1}+2^n)$

$=2^{n+1}-(2^{n+1}-1)$

$=1=$(右辺)

よって$\sigma(k)=2k-1$

証明より『$k=2^n$(nは自然数)のとき$\sigma(k)=2k-1$』が示された

研究結果 2 『$2^n\cdot a^{2m}$は第2 l-1不足数 (l,m,nは自然数、aは2^{n+1}より大きい素数)』となる。

研究結果 1と同様にして、洗い出し不足数を求めると次の式のようになった。

証明

$2\cdot 2^n a^{2m}-(1+2+2^2+\dots+2^n)(1+a+a^2+\dots+a^{2m})$ ⟸ 偶数-奇数になるので、奇数になる

$=2^{n+1}a^{2m}-(2^{n+1}-1)(1+a+a^2+\dots+a^{2m-1})-(2^{n+1}-1)a^{2m}$

$=a^{2m}-(2^{n+1}-1)(a^{2m}-1/a-1)$

$=1+a^{2m}-1-(2^n-1)(a^{2m}-1/a-1)$

$=1+(a^{2m}-1)\{1-(2^n-1/a-1)\}>0$

よって$2^n\cdot a^{2m}$は第2l-1不足数になる。

証明より『$2^n\cdot a^{2m}$は第2l-1不足数(l,m,nは自然数、aは2^{n+1}より大きい素数)』が示された

最終結果『$2^n\cdot a^{2m}$は第2 l-1不足数 (l,m,nは自然数、aは2^{n+1}より大きい素数)』

今後の展望

・不足数の規則性をもっと見つけていきたい

・不足数と過剰数の関連性をさがしていきたい

参考文献　なし