フィボナッチ数列の隣り合う2項の比の関連性とNナッチ数列への拡張

はじめに

Nナッチ数列とは、初項から第N項までの数字の和が第N+1項になり、第N+2項は第2項から第N+1項までの和、、、、となる数列のことである。

仮説

1. フィボナッチ数列、トリボナッチ数列、またそれを一般化したNナッチ数列について、その隣り合う二項の比の値を用いて、その導出方法、またはNを無限に飛ばしたときの極限値について調べる。
2. フィボナッチ数列、トリボナッチ数列、またはその拡張であるNナッチ数列において、比の値が収束することを証明する。
3. 上記1，2は初項～第N項によらず常に一定かどうか、または変化するのかを明らかにする。

フィボナッチ数列の定義

フィボナッチ数列とは

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$ と表される数列である

Nナッチ数列の定義

また、それらの拡張であるNナッチ数列は

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2} + N_{n-3} + \cdots + N_{n-N}$$

フィボナッチ数列の隣接2項の比の極限の求める

フィボナッチ数列をF_nとする

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$ とする

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}=1+\frac{F_{n-1}}{F_n}=1+\frac{1}{\alpha}=\alpha$$

$$\alpha^2-\alpha-1=0 \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

これを解くと極限値が求まる

これをもとに考えるとNナッチ数列の極限値について考察できる

$$\frac{N_{n+1}}{N_n}=\frac{N_n+N_{n-1}+N_{n-2}+\cdots+N_{n-N+1}}{N_n}$$

$$=1+\frac{N_{n-1}}{N_n}+\frac{N_{n-2}}{N_n}+\dots+\frac{N_{n-N+1}}{N_n}$$

$$=\frac{N_{n-1}}{N_n}+\frac{N_{n-1}}{N_n}\times\frac{N_{n-2}}{N_{n-1}}+\dots+\frac{N_{n-1}}{N_n}\times\frac{N_{n-2}}{N_{n-1}}\times\dots\times\frac{N_{n-N+1}}{N_{n-N+2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{n-1}}{N_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{N_{n-2}}{N_{n-1}}=\dots\ (\because n\to\infty)$$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_{n+1}}{N_n}=\beta$$ とすると、$\beta\neq1(\because N_{n+1}>N_n)$より、、

$$\beta = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots + \frac{1}{\beta^{N-1}}$$

$$\beta^N - \beta^{N-1} - \dots - \beta - 1 = 0$$

$$\beta^N - \frac{\beta^N-1}{\beta-1} = 0$$

$$\frac{\beta^N(\beta-2)+1}{\beta-1} = 0$$

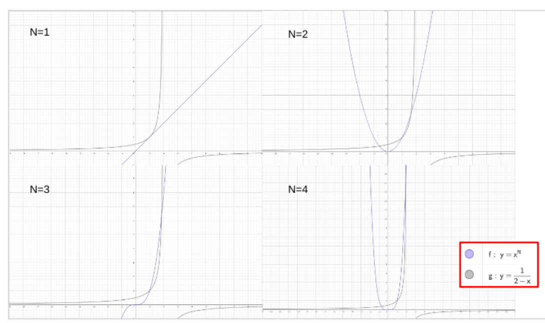
$$\beta^N(\beta-2)+1 = 0\ (\because\beta\neq1)$$

$$\beta^N = \frac{1}{2-\beta}$$ となる

N自体を無限に飛ばした際の極限値

$$N\to\infty \ \Rightarrow\ \beta\to2\text{-}0$$

下はこの式に関するグラフである



まとめ

フィボナッチ数列の連続二項の比の極限の導出を応用してNナッチ数列の連続二項の極限値を解に持つ方程式が与えられる。その式は$\beta^N = \frac{1}{2-\beta}$である。また、N→∞でβ＝2−0になると予想することができた。

今後の展望

前記における三つの仮説にアプローチしていく中で、まず第一としてこの連続二項の比の値が収束するということを示すことを目標とする。