大阪府立生野高等学校

平方根の値を求める公式を作ろう

1．研究動機と目的

平方根の近似値を求める方法について疑問を持ち、それについて学習することを目的として研究を進めていくことにした。

2．方法・結果

①まずは一次近似という方法に着目した。そこでマクローリン展開という数式について学習した。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\times x^k$$
$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots$$

$f(x)=\sqrt{x+1}$という式を用いる。マクローリン展開より$f(x)$をΣを用いずに昇べきの順で表すと

$$\sqrt{x+1}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots$$

となる。この式の最初の 2 項だけを用いて近似することを一次近似という。このことから

$$\sqrt{x+1}\approx 1+\frac{1}{2}x$$

という式が得られる。

②次にこの一次近似を用いてすべての正の有理数を正確に近似できるのかを確かめた。$x=0$から遠いと誤差は開いていくので、できるだけ$x=0$に近づける方法を考えた。具体例として求める平方根を$\sqrt{99}$として近似を行った。

$$\sqrt{99}=\sqrt{100\times\frac{99}{100}}$$
$$=10\sqrt{\frac{99}{100}}$$
$$=10\sqrt{1-\frac{1}{100}}$$
$$\approx 10\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{199}{20}=9.95$$

$\sqrt{99}$=9.94987…なので比較的近い値に近似できたと言える。

このような過程を一般化した。

$$\sqrt{n}=\sqrt{m^2\times\frac{n}{m^2}}$$
$$=m\sqrt{\frac{n}{m^2}}$$
$$=m\sqrt{1+\frac{n}{m^2}-1}$$
$$=m\sqrt{1+\frac{n-m^2}{m^2}}$$
$$\approx m\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{n-m^2}{m^2}\right)$$
$$=m+\frac{n-m^2}{2m}$$

よって

$$\sqrt{n}\approx m+\frac{n-m^2}{2m}$$

$(n,m$：正の有理数$)$

3．結論

この一般化した式を用いると、すべての正の有理数について平方根を近似することができる。

4．今後の展望

上の一般化した式で求めた近似値をmに代入する操作を繰り返すことにより、nにより近い平方数m^2を見つける方法を探究する。また、今回用いた一次近似を二次近似、三次近似…と次数を増やして応用していくことにより、より素早く正確な平方根の近似を目指していきたいと考えている。さらに、求めた近似値は小数第何位まで信頼できる値なのか、誤差の評価も取り入れていきたい。