泉北高校
数学班

正の約数の総和の研究

research of the sum of positive divisors

研究の目的(動機)

正の約数の総和や約数関数は主に整数で構成されていて視覚的に理解しやすいにも関わらず未だ多くのことがわかっていない。その中でも完全数や過剰数を知った私達は興味が湧き、正の約数の総和の新しい特徴を見つけたいと思い研究を始めた。

前提知識

（以下出てくる文字はすべて自然数である）

・正の約数の総和　nの正の約数をすべて足したもの
　σ(n)であらわす
　ex）σ(8)=1+2+4+8=15

・完全数について『σ(p)=2p』　となるpのことを**完全数**という
　ex）σ(6)=(2+1)(3+1)=12=2・6

・過剰数について『σ(k)=2k+m』となるkのことを**過剰数**という
　また、以下、上のような過剰数を **第m過剰数**とする
　ex）σ(20)=(1+2+4)(1+5)=42=2・20+2

σ(n)>2n　なら過剰数
σ(n)=2n　なら完全数
σ(n)<2n　なら不足数

研究の方法

①1からひたすら約数,約数の総和を **手計算して書き出す**(1000 個くらい)
②スプレットシートに表を作成する(1 ～ 20000 ほど)
③表より規則性がないかを調べる

n	6	7	8	9	10
σ(n)	12	8	15	13	18
σ(n)-2n	0	-6	-1	-5	-2

研究結果1 『 k=6・r （rは2,3以外の素数） のとき kは第12過剰数』である

作った表から第12過剰数が多く見つかる →24,30,42,54,66,78,102,114…　規則性を調べる
はじめ考えたこと　一つあとの数との差が12の倍数になっている？（例外アリ）
さらに思いついたこと　6・素数が絶対入ってる？(例外6・2,6・3)
ex）σ(498)=σ(6・83)=(2+1)(3+1)(83+1)=1008=2・498+12
そこで、『 **k=6・r （rは2,3以外の素数） のとき** $\underbrace{\sigma(k)=2k+12}_{\text{第12過剰数}}$ 』が成り立つと予想。

右図の証明より『 **k=6・r （rは2,3以外の素数） のとき σ(k)=2k+12** 』が示された

証明
k = 6・r = 2・3・r
σ(k) = (2+1)(3+1)(r+1)
　= 12(r+1)
k=6・r より 12r=2k
よってσ(k)=2k+12

研究結果2 『 k=P・r（Pは完全数、rはPの素因数でない素数） のとき σ(k)=2k+2P 』である

さらに6が完全数であることに注目
→同じ完全数の28,496でも同様の証明ができるか試す

28,496でも成り立つことが分かった

証明
k=28・r (rは28の素因数でない素数)
σ(k)=(1+2+4)(1+7)(r+1)
=56(r+1)
k=28・rより56r=2k
よってσ(k)=2k+56
第56過剰数となった

証明
k =496・r (rは496の素因数でない素数)
σ(k)=(1+2+4+8+16)(1+31)(r+1)
=992(r+1)
k=496・rより992r=2k
よってσ(k)=2k+992
第992過剰数となった

ここで
『**k=P・r (Pは完全数、rはPの素因数でない素数)**
のとき $\underbrace{\sigma(k)=2k+2P}_{\text{第2p過剰数}}$ 』
が成り立つと予想。

右図より示された

証明　**k=P・r** (Pは完全数、rはPの素因数でない素数)
σ(k)=2P(r+1)
=2Pr+2P
k=P・rより2Pr=2k
よってσ(k)=2k+2P

最終結果　k=P・r （Pは完全数、rはPの素因数でない素数）のとき<u>kは第2P過剰数となる</u>

今後の展望

・上の定理の逆 「kが第2P過剰数ならば、k=P・r (Pは完全数、rはPの素因数でない素数)である」の反例　24,54,304 などについて解き明かしたい
・今回は、過剰数について研究したため、不足数についても研究したい

参考文献　https://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%B4%84%E6%95%B0%E9%96%A2%E6%95%B0　… 約数関数 Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%95%B0　… 完全数 Wikipedia