フェルマーの最終定理に関する研究

はじめに（研究の目的）

・数学の発展に大きく寄与したフェルマーの最終定理を初等数学で証明し、数学について中高生に興味を持ってもらう。

・違った角度からの証明方法を試みる。

フェルマーの最終定理とは

・「n が自然数であるとき、$x^n+y^n=z^n$　（n≧3）となる自然数 x,y,z は存在しない」という定理。

・17 世紀にフェルマーが『算術』の余白に書き残し、20 世紀にワイルズが完全証明した

n=4 の場合の証明

今回は、n=4 の場合における代数的アプローチでの証明を示す

補題 1

$x^2+y^2=z^2$　を満たす自然数 x,y,z は、

互いに素な自然数m,n を用いて

$x=m^2-n^2$

$y=2mn$

$z=m^2+n^2$

原始ピタゴラス数に関する性質

とあらわせる。

(ここでは x を奇数、y を偶数とする)

＜補題 1 の証明＞

互いに素な自然数の組（x,y,z）について

$x^2+y^2=z^2$

が成り立つとき、

互いに素な自然数 n、m（n＞m）を用いて次のように表すことができる

$x=n^2-m^2$ ……①

$y=2nm$ ……②

$z=n^2+m^2$ ……③

（x,y,z）を原始ピタゴラス数とする。

x,y ともに偶数だと z も偶数となり最大公約数が 1 ではなくなる。

x,y ともに奇数だと、x^2+y^2は 4 で割って 2 余るが、z^2は 4 で割った余りは 0 か 1 なので不適。

つまり、x,y のどちらか一方のみ奇数で、他方は偶数

よって、x^2+y^2が奇数なので z も奇数

x を奇数、y を偶数としても一般性は失われない。

（z+x）/2 と（z-x）/2　のどちらか一方でも平方数でないとすると、それらの積は平方数である（（z+x）/2・（z-x）/2＝$y^2/4$に注意）ので

（z+x）/2 と（z−x）/2は共通因数 p≧2 を持つ

つまり、z+x＝2up, z-x＝2vp　ただし u,v は自然数

とかける。

これを x,z について解くと、

x=(u-v)p,z=(u+v)p

よって、x,z はともに p の倍数となり、さらに y も p の倍数

となるので、原始ピタゴラス数であるという仮定に矛盾する。

したがって、（z+x）/2、（z−x）/2 はともに平方数である

2 より（z+x）/2＝m^2、（z-x）/2＝n^2と書けるので、これを x,z について解くと、

$x=m^2-n^2$

$z=m^2+n^2$

となり、証明終了

＜証明＞

$x^4+y^4=z^4$

となる自然数 x,y,z は存在しない。

より強い条件の命題を証明することで証明を行う

これを証明するために

$x^4+y^4=z^2$

となる自然数 x,y,z は存在しないことを証明する。

$x^4+y^4=z^2$ となる自然数 x,y,z が存在すると仮定する。

このとき、

$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$

とあらわせる。

補題 1 を x^2, y^2, z に適用する。

互いに素な自然数m,n を用いると、

$x^2=m^2-n^2$　……①

$y^2=2mn$　……②

$z=m^2+n^2$　……③　　　となる。

$x^2=m^2-n^2$……①　より

$x^2+n^2=m^2$

補題 1 を x,m,n に適用する。

互いに素な自然数 s,t を用いると、

$x=s^2-t^2$　……①′

n=2st　……②′

$m=s^2+t^2$　……③′　　となる。

$y^2=2mn$……②より、両辺を 4 で割ると、

$(y/2)^2=m\cdot n/2$

m,n は互いに素であるから、m, n/2 はともに平方数である。

同様に、n=2st……②′ より、両辺を 2 で割ると、

n/2＝st

n/2 は平方数であり、s,t は互いに素であるから、s,t はともに平方数である。

$m=s^2+t^2$……③′ より $s=x_1,t=y_1,m=z_1$ とすると、

$z_1^2=(x_1^2)^2+(y_1^2)^2$

$x_1^4+y_1^4=z_1^2$　……④

ここで、

$z=m^2+n^2>m^2>m=z_1^2>z$

この証明を無限降下法という

④に同様の操作を行うと、

$z_1>z_2$　となる z_2を得られる。

この操作を無限に繰り返すと

$z>z_1>z_2>$……

となり、無限に小さい数が得られる。

しかし、z は自然数であるため

$z>z_1>z_2>\cdots>1$

となることに矛盾する。

今後の展望

・n=4 の場合について楕円曲線上の点に帰着させることで図形的に証明できないかを考察する。

・n=3 における証明に挑戦する。