電卓の不思議を公式化

大阪府立大手前高等学校

電卓の性質：一筆書きになるように三桁の数字を四つ足すと、毎回同じ「2220」になる。

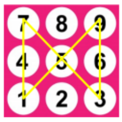
→ 四つ角を全て通り始点と終点が一致する四直線でできた図形とする。例は下図参照。

蝶ネクタイ型	砂時計型	正方形
741+159+963+357=2220	789+951+123+357=2220	123+369+987+741=2220
147+753+369+951=2220	987+753+321+159=2220	369+987+741+123=2220
963+357+741+159=2220	123+357+789+951=2220	987+741+123+369=2220
369+951+147+753=2220	321+159+987+753=2220	741+123+369+987=2220

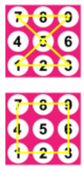
（証明）

対角にある数字、向かい合う数字を足すと、すべて１０になる！
また、５+５も１０。

蝶ネクタイ型のとき、
百の位では1と9、3と7の組み合わせで
100+900+300+700=2000
十の位で4と6、5と5の組み合わせで
40+60+50+50=200
一の位で1と9、3と7の組み合わせで
1+9+7+3=20
が作り出されることで、
2000+200+20=2220、と同じ数字が出てくる。



同様にして、
砂時計型の式では、１と９、３と７　(百の位)
　２と８、５と５　(十の位)
　１と９、３と７　(一の位)
正方形の式では、１と９、３と７　(百の位)
　２と８、４と６　(十の位)
　１と９、３と７　(一の位)
の組み合わせが使われることで**2220**という同じ数字を作り出している。



公式化したい！

n+2	n+3	n+4
n-1	n	n+1
n-4	n-3	n-2

中心の数字をｎとすると、

$$\{100(n+2)+10(n-1)+(n-4)\}+\{100(n-4)+10n+(n+4)\}+\{100(n+4)+10(n+1)\}+\{100(n-2)+10n+(n+2)$$
$$=100(n+2+n-4+n+4+n-2)+10(n-1+n+n+1+n)+(n-4+n+4+n-2+n+2)$$
$$=100*4n+10*4n+4n$$
$$=4n(100+10+1)$$
$$=4n(111)$$

通常の電卓でいう、2220のこと。(n=5)

この式は、砂時計型でも正方形でもｎの後の整数の部分が消えるので、同じ式になります。

→５×５は？

n+8	n+9	n+10	n+11	n+12
n+3	n+4	n+5	n+6	n+7
n-2	n-1	n	n+1	n+2
n-7	n-6	n-5	n-4	n-3
n-12	n-11	n-10	n-9	n-8

$$\{10000(n+8)+1000(n+3)+100(n-2)+10(n-7)+(n-12)\}+\{10000(n-12)+1000(n-6)+100n+10(n+6)+(n+12)\}$$
$$+\{10000(n+12)+1000(n+7)+100(n+2)+10(n-3)+(n-8)\}+\{10000(n-8)+1000(n-4)+100n+10(n+4)+(n+8)\}$$
$$=10000(n+8+n-12+n+12+n-8)+1000(n+3+n-6+n+7+n-4)$$
$$+100(n-2+n+n+2+n)+10(n-7+n+6+n-3+n+4)+(n-12+n+12+n-8+n+8)$$
$$=10000*4n+1000*4n+100*4n+10*4n+4n$$
$$=4n(11111)$$

→これで求められる？

２×２の電卓・・・4n(11)

…

４×４の電卓・・・4n(1111)

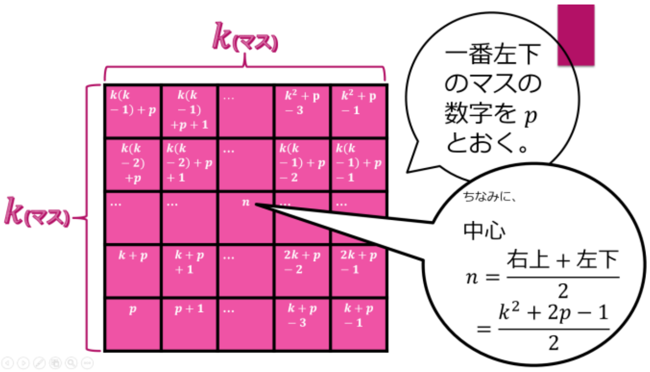
…

６×６の電卓・・・4n(111111)

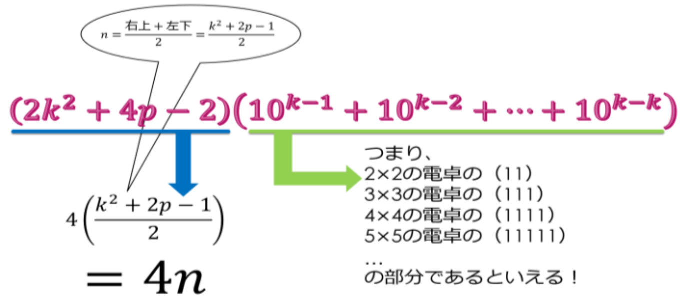
７×７の電卓・・・4n(1111111)

…

ｋ×ｋの電卓について



これらの蝶ネクタイ型、砂時計型、正方形のいずれの場合でも、下図の①、②、③、④を足して整理すると、、、



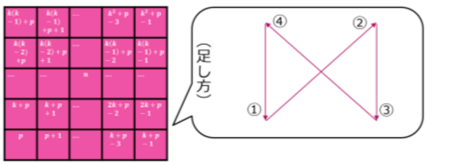
蝶ネクタイ型について、

①$10^{k-1}\{k(k-1)+p\}+10^{k-2}\{k(k-2)+p\}+\cdots+10^{k-k}p$

②$10^{k-1}p+10^{k-2}(k+p+1)+\cdots+10^{k-k}(k^2+p+1)$

③$10^{k-1}(k^2+p+1)+10^{k-2}\{k(k-1)+p-1\}+\cdots+10^{k-k}(k+p-1)$

④$10^{k-1}(k+p-1)+10^{k-2}(2k+p-2)+\cdots+10^{k-k}\{k(k-1)+p\}$



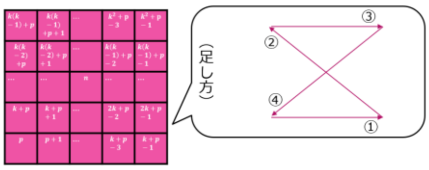
砂時計型について、

①$10^{k-1}p+10^{k-2}(p+1)+\cdots+10^{k-k}(k+p-1)$

②$10^{k-1}(k+p-1)+10^{k-2}(2k+p-2)+\cdots+10^{k-k}\{k(k-1)+p\}$

③$10^{k-1}\{k(k-1)+p\}+10^{k-2}\{k(k-1)+p+1\}+\cdots+10^{k-k}(k^2+p-1)$

④$10^{k-1}(k^2+p+1)+10^{k-2}\{k(k-1)+p-2\}+\cdots+10^{k-k}p$



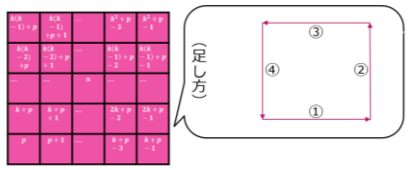
正方形について、

①$10^{k-1}p+10^{k-2}(p+1)+\cdots+10^{k-k}(k+p-1)$

②$10^{k-1}(k+p-1)+10^{k-2}(2k+p-2)+\cdots+10^{k-k}(k^2+p-1)$

③$10^{k-1}(k^2+p-1)+10^{k-2}(k^2+p-2)+\cdots+10^{k-k}\{k(k-1)+p\}$

④$10^{k-1}\{k(k-1)+p\}+10^{k-2}\{k(k-2)+p\}+\cdots+10^{k-k}p$



まとめ

・電卓の不思議は、中心の点に関して点対称の位置にある数字どうしを足すとすべて同じ数字になることが理由。

・一筆書きをして足して出てくる共通の数字は中心の数字やある一つのマスの数字とマスの数が分かれば求められる。

発展的課題

レピュニット数（各桁の数字がすべて 1 になる自然数）という数があるが、今回の公式化においてなぜレピュニット数が出てくるのかについてさらに深められると思った。

レピュニット数$=\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}=\frac{1(10^k-1)}{10-1}=\frac{10^k-1}{9}$