倍数判定法

大阪府立大手前高等学校

●導入

整数の選び方にかかわらず、すべての整数に適用できる倍数の判定法を作った。

●方法

判定したい整数を N とすると、N は整数 a, b を用いて 10a+b とあらわすことができる。

まずは具体的に考えてみる。13 の倍数について考えるとき、

$N=10a+b=(13a-3a)+b=13a+(-3a+b)$

$\boxed{\text{-3a+b が 13 の倍数⇔N は 13 の倍数}}$

●一般性を保つことの説明

整数 N が k の倍数かどうかを判定する。

整数 N は整数 a, b を用いて 10a+b とあらわすことができる。

$\therefore N=10a+b=ka+M$ (M は整数）…①

$M=(10-k)a+b$…②

②を①に代入して、

$N=ka+\{(10-k)a+b\}$

このとき M が k の倍数であれば 10a+b は k の倍数である。

これは逆も成り立つ。

∴整数 M が k の倍数⇔判定したい整数 N は k の倍数

●商・余りを出す手順

特に言及のない限り、この手順で扱う文字はすべて整数とする。

割られる数を 10a+b, 割る数を k, 求めたい商を x, 求めたい余りを y (0≦y<k) とおくと

$10a+b=kx+y$ …①

また $10a+b=ka+\{(10-k)a+b\}$…②

ここで $(10-k)a+b$ を k で割った時の商を m, 余りを n とする。

$(10-k)a+b=km+n$…③　とおく, $(0\leqq n<k)$

②, ③より 10a+b=ka+km+n

=k(a+m)+n…④

①, ④より kx+y=k(a+m)+n

$k\{x-(a+m)\}=n-y$

$0\leqq y<k, 0\leqq n<k$ より $-k<n-y<k$

ゆえに -1<x-(a+m)<1

x-(a+m) は整数だから x-(a+m)＝0, n-y=0

したがって x=a+m, y=n

●合同式

次に合同式を用いて考えてみる。

整数 N を k の倍数かどうかについて判定する(整数 N は m 桁)。

k を法とする。

$1\equiv 1$

$10\equiv 10-k$

$10^2\equiv(10-k)^2$

⋮

$10^{m-2}\equiv(10-k)^{m-2}$

$10^{m-1}\equiv(10-k)^{m-1}$

$\boxed{\text{判定法}}$

$0\leqq\alpha<k$（α は整数）とする。

$$(10-k)^{m-1}\times(N\text{の m 桁目の数字})$$
$$+(10-k)^{m-2}\times(N\text{の m − 1 桁目の数字})+\cdots$$
$$+(10-k)\times(N\text{の 2 桁目})+(10-k)^0\times(N\text{の 1 桁目})$$
$$\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ k)$$

この判定法は次のように表すこともできる。

$$\sum_{i=1}^{m}a_i(10-k)^{i-1}\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ k)$$

N を k で割った余りが α

とくに $\alpha=0$ のときに N は k の倍数

例) 21151 が 13 の倍数であるかを判定する。

上の判定法を用いて考える。(m=5, k=13)

$$\sum_{i=1}^{5}a_i(10-13)^{i-1}$$
$$=(-3)^{5-1}\times 2+(-3)^{4-1}\times 1+(-3)^{3-1}\times 1$$
$$+(-3)^{2-1}\times 5+(-3)^{1-1}\times 1$$
$$=130\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 13)$$

∴21151 は 13 の倍数である。