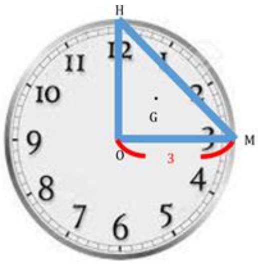
時計の長針・短針でできる三角形の重心の軌跡

大阪府立大手前高等学校

○目標

12時間式時計を半径3,中心（0,0）の円Oと見立てる。
また長針、短針の長さを等しいとし,長針と短針の先端をそれぞれM,Hとする。
△OHMの重心Gの軌跡の方程式を求める。



○重心Gの座標の一般化

一般化して

O(0,0)

Hは1分間に0.5°ずつ進むのでt分後の値は0.5t°と表せる

(tを媒介変数とする)

$\therefore$H(3sin0.5 t°,3cos0.5 t°)

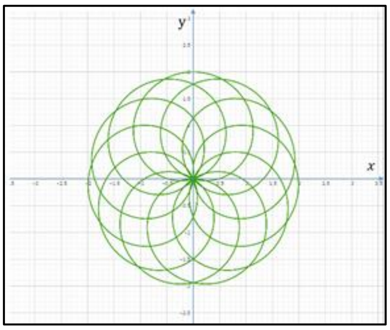
Mは1分間に6°ずつ進むのでt分後の値は6t°と表せる

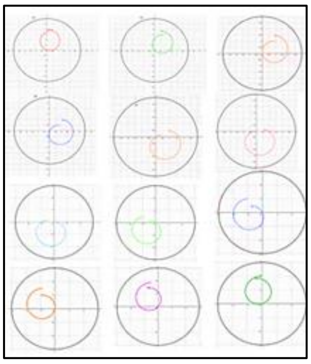
$\therefore$M(3sin6 t°,3cos6 t°)

$\therefore$ **重心の座標**$(sin0.5t^\circ + sin6t^\circ, \cos0.5t^\circ + cos6t^\circ)$

○重心Gの0≦t≦720での軌跡

(左図は1時~12時全体, 右図は1時間ごとの軌跡)





図から分かるように

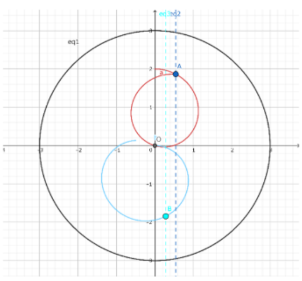
- 1時間ごとの軌跡が真円を描いていない
- 1時間ごとの軌跡が0時～6時の間すべて違う

→今の自分たちでは軌跡を方程式で表すことができなかった

しかし、この軌跡の性質について考えていくうちに、対称性があるのではないかと思ったので、このことについて調べていく

右図から分かるように、
0時の軌跡と6時の軌跡は異なっている

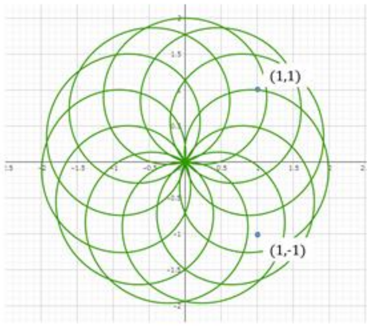
→x軸に関して対称でない
と仮説できる



○x軸に関して対称ではないのか？

x軸対称であると仮定する。
x軸対称ならば（A,B）（A,-B）となるような2点が存在する。

（例）3：00の重心Gは（1,1）である。ここでx軸対称ならば（1, -1）となる点が存在するはずである。しかし、右図からわかるように（1, -1）を通るような点は存在しない。よって、仮定に矛盾するのでx軸対称ではない。



○y軸に関して対称なのか？

時計は12時間で1周する。
つまり720分で1周するということになる。

ここで、t分後の座標と（720-t）分後の座標について考える。
y軸に対称であるということは、
t分後の座標と（720-t）分後の座標がy軸に対称であるということである

ｉ）t分後
前述のとおり座標は（$sin0.5t^\circ + sin6t^\circ, \cos0.5t^\circ + cos6t^\circ$）

ⅱ）（720-t）分後
前述した一般化した式に（720-t）を代入すると、

（$sin(360-0.5t)^\circ + sin(360\times12-6t)^\circ$,
$\cos(360-0.5t)^\circ + cos(360\times12-6t)^\circ$）

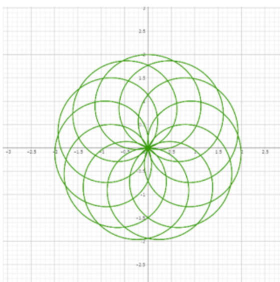
＝（$-(sin0.5t^\circ + sin6t^\circ), \cos0.5t^\circ + cos6t^\circ$）

ｉ, ⅱよりt分後と（720-t）分後の座標がy軸対称なので
この図形はy軸対称といえる。

○結論

以上のことより

重心Gの軌跡は右図のようになり、
G($sin0.5t^\circ + sin6t^\circ$, $\cos0.5t^\circ + cos6t^\circ$)



重心Gの軌跡は

x軸に関して対称ではなく、

y軸に関して対称になる。

○今後の展望

長針と短針でできる三角形の重心以外の五心の1時~12時までの軌跡を求め、重心の軌跡と比較してみたい

○活用ソフト

Geogebra 全機能版（Web アプリ）

https://www.geogebra.org/classic