49と同じ性質をもつ自然数

§1　概要

自然数 49 は隣り合う平方数2^2と3^2をこの順に並べて構成される自然数で，49 自身も7^2と平方数である．同様に隣り合う平方数n^2と$(n+1)^2$をこの順に並べて構成される自然数が平方数になる例は 49 の他に存在するのだろうか．**Excel** で探索すると$n \le 1{,}000$ **万**では存在しなかった．現在，完全な解決には至っていないものの幾つかの場合については存在しないことが証明できている．

§2　予想

m,n,kを自然数とする．隣り合う平方数n^2と$(n+1)^2$をこの順に並べた自然数は

$$n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2$$

と表される．ただし，kは$(n+1)^2$の桁数であるとする．これが平方数となるとき，

（2.1.1）　$$m^2 = n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2$$

と表されるとする．kは$(n+1)^2$の桁数なので，

（2.1.2）　$$10^{k-1} \le (n+1)^2 < 10^k$$

を満たす．

命題 2.1.3（予想）
(2.1.1)，(2.1.2)を同時に満たす自然数の組(m,n,k)は$(7,2,1)$のみである．

したがって，以下では$n \ne 2$のときに(2.1.1)，(2.1.2)を同時に満たす自然数の組(m,n,k)が存在しないことを考察する．

§3　考察(1)

この章では比較的簡単な場合についての証明を与える．

3.1　nが奇数の場合の証明

(2.1.1)を変形すると，

$$\frac{(m+n+1)(m-n-1)}{n^2} = 10^k$$

10^kは自然数より，左辺も自然数である．(2.1.1)よりmとnの偶奇は異なる．したがって，左辺の分子は偶数である．
よって，$n \ge 3$が奇数のとき矛盾する．また，$n=1$のとき$m=\sqrt{14}$となり矛盾する．　■

3.2　kが偶数の場合の証明

（3.2.1）　$$n \cdot 10^{\frac{k}{2}} < m < n \cdot 10^{\frac{k}{2}} + 1$$

であることを示す．これを示せば，隣り合う整数の間にmが存在するため，mが整数であることに矛盾する．
(3.2.1)の各辺は正である．各辺を2乗して，$k=2l$とおくと，

（3.2.2）　$$\left(10^l \cdot n\right)^2 < m^2 < \left(10^l \cdot n + 1\right)^2$$

となる．したがって，(3.2.2)を示す．
(2.1.1)より$\left(10^l \cdot n\right)^2 < m^2$は明らかに成り立つ．$m^2 < \left(10^l \cdot n+1\right)^2$について，

(右辺)-(左辺)

$$=\left(10^l \cdot n+1\right)^2 - m^2$$

$$=\left(10^l \cdot n+1\right)^2 - n^2 \cdot 10^k - (n+1)^2$$

$$=n\left(2 \cdot 10^l - n - 2\right)$$

ここで(2.1.1)より$(n+1)^2 < 10^k$なので，$n+1 < 10^l$．したがって，$2 \cdot 10^l - n - 2 > 0$であり$n > 0$なので，

$$n\left(2 \cdot 10^l - n - 2\right) > 0$$

よって右側の不等式も成り立つ．　■

§4　考察(2)

この章ではnが偶数かつkが奇数のときについて，nの素因数の数に着目して考察を行う．

4.1　nの素因数が1つの場合の証明

nの素因数が1つのとき，$n \ne 2$よりnは奇数である．これは3.1より矛盾．

4.2　nの素因数が2つの場合の証明

3.1よりnは偶数なのでpを素数として$n=2p$とおくことができる．$n=4$は解でないのでpは奇素数としてよい．
ここで以下の補題を示す．

補題 4.2.1
$n \ge 4$のとき，$n^2 < m < 4n^2$である．

(イ) $n^2 < m$の証明
(2.1.1)，(2.1.2)より，

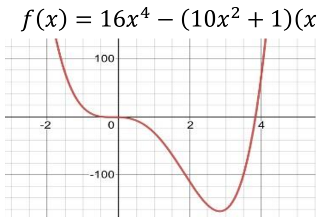
$$m^2 = n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2 > n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n^2+1)(n+1)^2 > n^4$$

より，$n^2 < m$．

(ロ) $m < 4n^2$の証明
(2.1.1)，(2.1.2)より，

$$m^2 = n^2 \cdot 10^k + (n+1)^2 \le 10n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = (10n^2+1)(n+1)^2$$

$f(x) = 16x^4 - (10x^2+1)(x+1)^2$とおくと，$y=f(x)$のグラフは下の図のようになる．



よって，4以上の実数xに対して，$f(x) > 0$が成り立つから，$n \ge 4$に対して，$(10n^2+1)(n+1)^2 < 16n^4$．
よって，$m^2 < 16n^4$なので$m < 4n^2$．　■

pは奇素数なので$n \ge 6$となり補題4.2.1より，

（4.2.2）　$$4p^2 < m < 16p^2$$

である．(2.1.1)で$n=2p$として変形すると，

（4.2.3）　$$\left(\frac{m+2p+1}{2}\right)\left(\frac{m-2p-1}{2}\right) = 10^k \cdot p^2$$

ここで，(4.2.3)の左辺の因数に着目して次の補題を示す．

補題 4.2.4
(4.2.3)において，$\frac{m+2p+1}{2}$と$\frac{m-2p-1}{2}$の一方がp^2で割り切れる．

$gcd\left(\frac{m+2p+1}{2}, \frac{m-2p-1}{2}\right) = d$とし，$\frac{m+2p+1}{2} = ad$，$\frac{m-2p-1}{2} = bd$とおくと，

$$2p+1 = (a-b)d$$

なので，dは$2p+1$の約数である．
また，$gcd(2p+1, p) = 1$であるから，$\gcd(d,p)=1$となり$\frac{m+2p+1}{2}$と$\frac{m-2p-1}{2}$が共にpで割り切れることはない．
よって(4.2.3)より，$\frac{m+2p+1}{2}$と$\frac{m-2p-1}{2}$の一方がp^2で割り切れる．　■

(4.2.2)と補題4.2.4より，

$$\frac{m+2p+1}{2} = sp^2 \ (s=3,4,\dots,8)，\quad \frac{m-2p-1}{2} = tp^2 \ (t=2,3,\dots,7)$$

の12通りの候補が浮かぶ．これらをmについて解いて，(1.2.1)に代入すると，

$$10^k = s(sp^2-2p-1)，\quad 10^k = t(tp^2+2p+1)$$

となる．sp^2-2p-1，tp^2+2p+1が自然数なのでs,tが2, 5以外の素因数をもつ場合は矛盾であるから，
$s=3,6,7$，$t=3,6,7$は不適．（ここでは代表して$t=2,5$のみ考える．）

・$t=2$のとき
$10^k = 2(2p^2+2p+1)$より，$10^{k-1} \cdot 5 = 2p^2+2p+1$．
右辺が奇数なので，$10^{k-1} \cdot 5$は奇数である．したがって$k=1$．
このとき，$p^2+p-2=0$より$p=-2,1$であるが，pは素数より矛盾．

・$t=5$のとき
$10^k = 5(5p^2+2p+1)$より，$10^{k-1} \cdot 2 = 5p^2+2p+1$．
$p \equiv 0,1,\dots,15 \ mod16$に対して，(右辺)$\equiv 1,8,9,4,9,8,1,4,1,8,9,4,9,8,1,4 \ mod16$より，$10^{k-1} \cdot 2$は16の倍数ではない．
したがって，$k=1,2,3$である．このときそれぞれ，$5p^2+2p+1=2$，$5p^2+2p+1=20$，$5p^2+2p+1=200$であるが，これらはいずれも素数解をもたず矛盾．

同様の手法で他の場合も証明できる．よって，nの素因数は2つではない．

4.3　nの素因数が3つの場合（未解決）

nが素因数を3つもつとき，p,qを素数として$n=2pq$とおける．

（4.3.1）　$$\left(\frac{m+2pq+1}{2}\right)\left(\frac{m-2pq-1}{2}\right) = 10^k p^2 q^2$$

補題 4.3.2
(4.3.1)において，$\frac{m+2pq+1}{2}$と$\frac{m-2pq-1}{2}$の一方のみ，p^2で割り切れる．（証明は補題4.2.4と同様にできるため省略）．

補題4.2.1より，$4p^2q^2 < m < 16p^2q^2$であり，補題3.3.2より，

$$\frac{m+2pq+1}{2} = sp^2 \ (s=2q^2+1, 2q^2+2, \dots, 8q^2).$$

$$\frac{m-2pq-1}{2} = tp^2 \ (s=2q^2, 2q^2+1, \dots, 8q^2-1).$$

の$12q^2-2$個の候補が浮かぶ．
この候補をすべて否定することが出来れば，証明は可能である．しかし，qの値によって候補の個数が変化し，s,tの約数も変化するので一般の証明は難しいと考えられる．ただし具体的なqについての証明は可能で，$q=2,3$の場合は証明することができた．素因数が4つ以上の場合も未知な素因数が1つなら証明は可能だが，一般の証明は難しいと考えられる．

§5　考察(3)

5.1　合同方程式の解の記述

(2.1.1)が成り立つならば，

（5.1.1）　$$m^2 \equiv (n+1)^2 \ \ mod10^k$$

が成り立つ．ここで$k>1$としてよい．この節ではこの二次合同方程式の解を記述する方法について述べる．そこでより一般の，

（5.1.2）　$$x^2 \equiv a \ \ mod10^k$$

の解法を考える．まず，幾つか補題を示す．

補題 5.1.3
(1) $p \ne 2$を素数とするとき，$p \nmid a$で$x^2 \equiv a \ \ modp$が解をもつならば，$x^2 \equiv a \ \ modp^k$の解は，
解の1つを$x \equiv x_0 \ \ modp^k$として，$x \equiv \pm x_0 \ \ modp^k$である．
(2) $a \equiv 1 \ \ mod8$，$k \ge 3$ならば，$x^2 \equiv a \ \ mod2^k$は解を4つもち，その1つを$x \equiv x_0 \ \ mod2^k$とすると，
$x \equiv \pm x_0$，$\pm x_0 + 2^{k-1} \ \ mod2^k$　である．

証明は省略する．（参考文献[3]を参照．）

補題 5.1.4
$a \equiv 1,9 \ \ mod40$ならば，(5.1.2)は8つの解をもつ．

証明は省略する．（中国剰余定理と補題5.1.3を用いる．$a \equiv 1,9 \ \ mod40$は補題5.1.3の使用条件である．）
補題5.1.4より(5.1.2)の解の個数が分かるので，具体的に8つの解を挙げればそれですべての解となる．

定理 5.1.5
整数a,kが，$a \equiv 1,9 \ \ mod40$と$k \ge 3$を満たすとき，

$$x^2 \equiv 1 \ \ mod10^k.$$

の解の1つで，

$$\begin{cases} x \equiv 1 \ \ mod2^k \\ x \equiv -1 \ \ mod5^k \end{cases}.$$

の解を$x \equiv u_k \ \ mod10^k$とする．

ここでu_kは$\lim_{k\to\infty} u_k = u = \cdots 836425781249$の下$k$桁に対応する．

このとき，$x^2 \equiv a \ \ mod10^k$
の解の1つを$x \equiv x_0 \ \ mod10^k$とするとすべての解は，

$$x \equiv \pm x_0，\pm x_0 u_k，\pm x_0 + \frac{10^k}{2}，\pm x_0 u_k + \frac{10^k}{2} \ \ mod10^k.$$

である．

(5.1.2)において，
(イ) $x \equiv x_0 \ \ mod10^k$が解ならば，$x \equiv -x_0 \ \ mod10^k$も解である．
(ロ) $x \equiv x_0 \ \ mod10^k$が解ならば，$x \equiv x_0 + \frac{10^k}{2} \ \ mod10^k$も解である．
(ハ) $x \equiv x_0 \ \ mod10^k$が解ならば，$x \equiv x_0 u_k \ \ mod10^k$も解である．
の3つを示せば定理5.1.5より定理が従う．（以下証明略）

5.2　5.1節の解に対する考察（未解決）

定理5.1.5より合同方程式$x^2 \equiv a \ \ mod10^k$は解を1つ見つけられればすべての解が構成できる．この節では合同方程式(5.1.1)の解を実際に構成して，その解の一部に矛盾が生じることについて述べる．(5.1.1)は自明な解$m \equiv n+1 \ \ mod10^k$をもつから，$(n+1)^2 \equiv 1,9 \ \ mod40$，つまり中国剰余定理と2.1節より$n \not\equiv 4 \ \ mod5$のときすべての解は，

$$m \equiv \pm(n+1)，\pm(n+1)u_k，\pm(n+1) + \frac{10^k}{2}，\pm(n+1)u_k + \frac{10^k}{2} \ \ mod10^k$$

である．（$m \equiv n+1$，$(n+1) + \frac{10^k}{2}$は比較的簡単に矛盾が導けるためここでは省略する）

$m \equiv -(n+1) \ mod10^k$のとき

整数tがあり，$m = 10^k t - (n+1)$とおける．ここで$t \le 0$を仮定すると$m<0$となり矛盾するからtは正の整数としてよい．

このとき，$m^2 = 10^{2k}t^2 - 2t(n+1)10^k + (n+1)^2 = n^2 10^k + (n+1)^2$より，$n^2 = 10^k t^2 - 2t(n+1)$となる．

(2.1.2)より$n+1 < (n+1)^2 < 10^k$，$n^2 < (n+1)^2 < 10^k$なので，$10^k(t^2-2t) < 10^k t^2 - 2t(n+1) = n^2 < 10^k$

したがって，$t^2 - 2t < 1$．tは整数なので$t=1,2$．

$t=1$とすると，$n^2 = 10^k - 2(n+1)$．したがって$\left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{10^k-1}{9} = 11\dots11$ (k桁)より$\left(\frac{n+1}{3}\right)^2$はrep-unit数であるが，2桁以上のrep-unit数は平方数でないため矛盾．
$t=2$とすると，$(n+2)^2 = 4 \cdot 10^k$となるが3.2節より矛盾．

$m \equiv -(n+1) + \frac{10^k}{2} \ \ mod10^k$のとき

整数tがあり．$m = 10^k t - (n+1) + \frac{10^k}{2}$とおける．$t \le -1$とすると$m<0$となり矛盾するので，$t \ge 0$としてよい．このとき，

$m^2 = 10^{2k}\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - (2t+1)(n+1)10^k + (n+1)^2 = n^2 10^k + (n+1)^2$より，

$n^2 = 10^k\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - (2t+1)(n+1)$であり，$n+1 < (n+1)^2 < 10^k$，$n^2 < (n+1)^2 < 10^k$なので，

$10^k\left(t^2 - t - \frac{3}{4}\right) < 10^k\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - (2t+1)(n+1) = n^2 < 10^k$より$t^2 - t - \frac{3}{4} < 1$．$t$は整数より，$t=0,1$．

$t=0$とすると，$n^2 = \frac{10^k}{4} - (n+1)$．つまり，$(2n+1)^2 = 10^k - 3 \equiv 2 \ \ mod5$となるが2は5の平方非剰余なので矛盾．

$t=1$とすると，$n^2 = \frac{9}{4}10^k - 3(n+1)$．つまり，$(2n+3)^2 = 9 \cdot 10^k - 3 \equiv 2 \ mod5$となるが2は5の平方非剰余なので矛盾．

u_kを含む4つの場合はu_kの扱いが難しく，まだ解決できていない．無限10進数やp進数の理解を深めて考えようと思う．

§6 結論

以下に現在解決しているもの，考察中のものをまとめる

〇解決済み

nが奇数の場合，kが偶数の場合，nの素因数が1,2個の場合，$m \equiv \pm(n+1), \pm(n+1) + \frac{10^k}{2}$の場合

〇考察中

nの素因数が3つ以上の場合，$m \equiv \pm(n+1)u_k, \pm(n+1)u_k + \frac{10^k}{2}$の場合

今後はこの考察中のもの，とくに合同方程式の解の考察についてを整数論の勉強をしながら考えていきたい．

§7　参考文献

[1]加藤文元　MathPower2016『天に向かって続く数　あるいは-狂った-数』
[2]加藤文元　『天に向かって続く数』日本評論社
[3]高木貞治　『初等整数論講義』共立出版
[4]雪江明彦　『整数論1　初等整数論からp進数へ』日本評論社