コラッツ予想

富田林高校 SSH 数学班

コラッツ予想とは

どの自然数から始めても以下の操作によって、1になるという予想。
[操作]
偶数ならばその数を1/2倍し、奇数ならば3倍して1を足す。
すなわち、前の数nを次の数に写す関数は

$$Col(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}\ (n\ is\ even)\\ 3n+1\ (n\ is\ odd)\end{cases}$$

である。

背景

数学班のメンバーでテーマ決めをしているときに、整数論が話題に上がったので調べたところ、コラッツ予想の単純さと未解決というところに魅力を感じ、先輩が研究していたことも相まって、全員が納得しこのテーマに決まった。

経緯

他の研究でも、コラッツ予想を変形しているものが多く、

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}+a\ (n\ is\ even)\\ 3n+b\ (n\ is\ odd)\end{cases}$$

の$(a,b)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$の場合で試してみた。
その結果、$(a,b)=(1,-1)$の場合に、興味深い結果が得られたので、これに着目して研究を進めた。

仮説

$f(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}+1\ (n\ is\ even)\\ 3n-1\ (n\ is\ odd)\end{cases}$を考えてこれについて以下の仮説を立てた。

[仮説1]
任意の自然数から始めて操作を行っていけば、5 → 14→ 8のループに行き着くこと。
Ex.)
3 → 8 → 5 → 14 → 8 → ⋯
7 → 20 → 11 → 32 → 17 → 50 → 26 → 14 → 8 → 5 → 14 → ⋯
[仮説2]
自然数m,nに対して$2^{2n+m}-2^m+2$は5 → 14 → 8のループに行き着く。

証明(仮説1)

10^6以下の数から始めた場合を実験的に調べた。
使ったコード(python)

```
for k in range(1000000):
    if k % 10000 == 0:
    t :int = k + 1;
    s = 0
    while t != 1:
        s += 1
        if (t == 5):
            break
        if s > 1000000:
            break
        if t % 2 == 0:
            t /= 2
            t += 1
        else:
            t *= 3
            t -= 1
```

証明(仮説2)

逆操作$E(n)=2n-2, O(n)=\frac{n+1}{3}$を考える。(ただし、操作$O$は$n\equiv 2\ (mod\ 6)$のときのみ使える)
数列$\{a_n\}$を5に足してn回操作Eを行った数とする。
すなわち$a_1=5, a_{n+1}=E(a_n)$とおく
$a_{n+1}=2a_n-2$
$a_{n+1}-2=2(a_n-2)$
よって$a_n-2=2^{n-1}\cdot 3$
したがって$a_n=3\cdot 2^{n-1}+2$
$a_{2n+1}=3\cdot 2^{2n}+2$より$a_{2n+1}\equiv 2\ (mod\ 6)$
よってa_{2n+1}に操作Oが定義されて、$O(a_{2n+1})=2^{2n}+1$となる
これに操作Eをm回行うことで、$(2^{2n}-1)\cdot 2^m+2=2^{2n+m}-2^m+2$となるから
$2^{2n+m}-2^m+2$から操作を繰り返し行うことで5 → 14 → 8のループに行き着く。

展望

一般の自然数から始めてもループに行き着くことを証明する。
コラッツ予想と同値であるかどうかを確かめる。