循環小数の不思議

青柳 柚咲・大山 泰希・加藤 千晴
小森 真那・高槻 達起・寺田 飛秀
原 萌恵・安田 仁貴

循環小数とは…

ある桁から先で同じ数字の列が無限に繰り返される小数。また、繰り返される数字の列を循環節という。

例：$\frac{3}{13}=0.\dot{2}3076\dot{9}$

$\frac{5}{17}=0.\dot{2}94117647058823\dot{5}$

＜実践＞

$\frac{3}{13}=0.\dot{2}3076\dot{9}$

$\frac{17}{13}=1.\dot{3}0769\dot{2}$

$\frac{5}{13}=0.\dot{3}8461\dot{5}$

$\frac{7}{13}=0.\dot{5}3846\dot{1}$

$\frac{11}{13}=0.\dot{8}4615\dot{3}$

＜仮説＞

①分子が異なっていても分母が同じなら循環節を構成する各数の和は同じになる。
②分母が素数の時、循環節を構成する各数の和は9の倍数になる。
③循環している桁数が偶数のとき、桁数を前半と後半に分け、それぞれの位同士を足すと、9になる。

abcdef ←循環節
abc ←前半
def ←後半

a+d=b+e=c+f=9

④循環節の桁数は分母（素数）－1の約数になる。

①分子が異なっていても分母が同じなら循環節を構成する各数の和は同じになる。

①分子が異なっていても分母が同じなら循環部分の和は同じになる

$\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$　0+7+6+9+2+3=27
$\frac{2}{13}=0.\dot{1}5384\dot{6}$　1+5+3+8+4+6=27
$\frac{3}{13}=0.\dot{2}3076\dot{9}$　2+3+0+7+6+9=27
$\frac{4}{13}=0.\dot{3}0769\dot{2}$　3+0+7+6+9+2=27
$\frac{5}{13}=0.\dot{3}8461\dot{5}$　3+8+4+6+1+5=27

分母が13の場合は循環部分の和は27に定まる。

②分母が素数の時、循環節を構成する各数の和は 9の倍数になる。

②分母が素数のとき、循環節を構成する各数の和は9の倍数になる（2,3,5を除く）

$\frac{2}{13}=0.\dot{1}5384\dot{6}$　1+5+3+8+4+6=27 ○
$\frac{5}{31}=0.\dot{1}6129032258064\dot{5}$
1+6+1+2+9+0+3+2+2+5+8+0+6+4+5=54 ○

$\frac{5}{12}=0.41\dot{6}$　6 ×
$\frac{8}{15}=0.5\dot{3}$　3 ×

証明②' 分母が素数の時、循環節を構成する各数の和は9の倍数になる。

2,3,5以外の素数をpとする。
$\frac{1}{p}$を考える。$\frac{1}{p}$の循環節をxとおくと、px=0.9999…9 循環節は有限なので左記のように定まる。このとき、式の左辺は9を因数に持つ。また、pは素数で9と互いに素であるからxは9を因数にもつ。

例：$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$
px=0.9999… つまり、7×0.142857=0.999999
互いに素　よって、0.142857は9を因数にもつ。

また、$\frac{m}{p}$(mはpと互いに素な自然数)となったとしても
px=0.9999…9×m　となり、計算結果に影響はない。

よって、分母が素数(2,3,5を除く)の時、循環節を構成する各数の和は9の倍数になる。

③循環している桁数が偶数のとき、桁数を前半と後半に分け、それぞれの位同士を足すと、9になる。

③循環している桁数が偶数のとき

abcdef ←循環節
abc ←前半
def ←後半

a+d=b+e=c+f=9

$\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$　076|923　0+9=9 7+2=9 6+3=9
$\frac{2}{13}=0.\dot{1}5384\dot{6}$　153|846　1+8=9 5+4=9 3+6=9
$\frac{3}{13}=0.\dot{2}3076\dot{9}$　230|769　2+7=9 3+6=9 0+9=9

証明③'
循環節の桁数が2nになるとき、前半（①式、位が高いほう）と後半（②式、位が低いほう）にわけるとそれぞれn桁ずつになる。

10^n＝ ax＋m　…①　（mは自然数、xは2, 3, 5以外の素数）
ここでmは②式において最高位の数になる。

m×10^n＝bx＋1　…②

①＋②をして　(m＋1)10^n＝(a＋b)x＋(m+1)
⇔(m＋1)(10^n−1)=(a + b)x　…③
↓
99999…(9がn個並ぶ)

ここにおいて、　$10^{2n}\equiv 1$ (modx)
$10^n \equiv \pm 1$ (modx)
$10^n \equiv 1$ (modx) だと循環がn桁で終わるので不適。

$10^n \equiv -1$ (modx)
つまり$10^n \equiv x-1$ (modx)

X−1=m　すなわち　m＋1＝x
③に代入してm+1≠0 より
10^n−1=a+b　よって③は証明された。

④循環節の桁数は分母（素数）－1の約数になる。

④循環節の桁数は分母（素数）－1の約数で循環する。

$\frac{3}{19}=0.\dot{1}5789473684210526\dot{3}$　18桁　18×1+1=19

$\frac{3}{43}=0.\dot{0}6976744186046511627\dot{9}$　21桁　21×2+1=43

$\frac{5}{37}=0.\dot{1}3\dot{5}$　3桁　3×12+1=37

循環小数の一般式

$x = \frac{1}{7} = 0.142857\cdots$　―①

$10^6x = 142857.142857\cdots$　―②

②―①より
$10^6-1x = 142857$

$x = \frac{142857}{10^6-1} = \frac{1}{7}$

$\frac{1}{p} = \frac{N}{10^\ell-1}$(pは2,5以外の素数、Nは循環節、ℓは循環節の桁数)

$\frac{1}{p} = \frac{N}{10^\ell-1}$(pは2,5を除く素数、Nは循環節、ℓは循環節の桁数)

変形して、$10^\ell-1=Np$ ⇔ $10^\ell \equiv 1$ (mod p)
このとき、$\frac{1}{p}$はℓ桁で循環する。

フェルマーの小定理　$a^{p-1} \equiv 1$ (mod p) より　a=10で
$10^{p-1} \equiv 1$ (mod p) ⇔ $\frac{1}{p}$はp−1桁で循環する。

ℓ<p−1の場合、p−1=mℓ （m=1,2,3…)を満たすのでℓはp−1の約数である。

$\frac{1}{11}=0.090909\cdots$ ←2桁で循環するが、2は10の約数である。

レピュニット数

1,11,111,1111,…のように全ての桁の数字が1である自然数
よって10進法におけるレピュニット数は

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}$$

と表すことができる。

任意のレピュニット数をR_nとする。(nは桁数)
R_nを変形して
$R_n = a \times \frac{R_n}{a}$(aは$R_n$の素因数)

このとき、$\frac{a}{R_n}$はn桁で循環し、循環節の数字は9aとなる。

ex)R_3のとき
111=3×37
このとき、$\frac{1}{37} = 0.027027\cdots$

〈わからなかったこと〉

・仮説①《分子が異なっていても分母が同じなら循環節を構成する各数の和は同じになる。》の証明
・レピュニッド数について

＜今後の展望＞

・今回分からなかった仮説の証明
・桁数を予測する式を立てるところまではいかなかったので、一般式を立てられるようになる
・レピュニッド数についての式を証明する

参考文献

https://ja.Wikipedia.org/wiki/循環小数
https://ja.Wikipedia.org/wiki/フェルマーの小定理
https://ja.Wikipedia.org/wiki/レピュニット