ボールのバウンドの軌道のグラフ化

大阪府立岸和田高等学校
数学ゼミ

要旨

- 水平投射したボールのバウンドの軌道を水平速度、落下させる高さ、反発係数を用いて、n回目のバウンドの放物線を連続的に並べてxy平面上に描画する。（ただし、ボールは質点と考える）
- 使用するグラフ描画サイトは$desmos$

研究意義・目的

この研究の目的は、バウンドの性質について理解をより深めるだけでなく数学や物理における落体運動、幾何学、代数学などの様々な分野のつながりをこの研究を通して学ぶことである。

研究手法

ボールのバウンドの性質について調べる

反発係数について調べる

軌道の条件を考える

関数の導出

ボールのバウンドの軌道を関数で表すと次のようになる

$$y=-\frac{g}{2v^2}\left\{x-\frac{\sqrt{2ghv^2}(e+1)(1-e^n)}{g(1-e)}\right\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

v：x軸方向の初速度 $\{v>0\}$
h：投げ始める高さ $\{h>0\}$
e：反発係数 $\{0<e<1\}$
n：n回目のバウンド $\{n=0,1,2,3\cdots\}$

反発係数とは

$$e=-\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

と定義される定数である

v_1: 衝突前の速度
v_2: 衝突後の速度
h_1: n回目のバウンドの頂点の高さ
h_2: $n+1$回目のバウンドの頂点の高さ

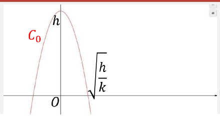
＜導出１＞

条件：
1. バウンドの軌道は放物線$C_n(C_0,C_1,C_2,\cdots\cdot)$として、放物線を並べて表現する。
2. 水平方向の速度は一定
3. バウンドの高さは初項h公比e^2の等比数列で、指数関数的に減少していく。
4. 放物線C_nとC_{n+1}はx軸上で交わる。
5. $y\geq 0,x\geq 0$

条件１で、放物線C_0は次のように定義する

$C_0: y=-kx^2+h$ （kは正の定数）

$y=0$のとき、$x=\sqrt{\frac{h}{k}}$



- 次に、C_1の頂点を（a,e^2h）とすると、C_1は、

C_1：$y=-k(x-a)^2+e^2h$ （∵条件３）

条件４より、C_1は（$\sqrt{\frac{h}{k}},0$）を通る。

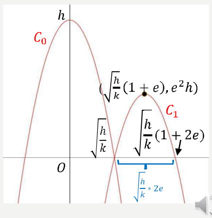
$$\therefore 0=-k\left(\sqrt{\frac{h}{k}}-a\right)^2+e^2h$$

$$\therefore a=\sqrt{\frac{h}{k}}(1+e)\quad (\because a>\sqrt{\frac{h}{k}})$$

$$\therefore C_1: y=-k\left\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}(1+e)\right\}^2+e^2h$$

$y=0$のとき、

$$x=\sqrt{\frac{h}{k}}(1+2e)\quad (\because x>\sqrt{\frac{h}{k}})$$



- 同様に、$C_2,C_3,C_4,\cdots\cdot$も導出していくと、

C_0：$y=-k\left(x-\sqrt{\frac{h}{k}}*0\right)^2+e^0h$

C_1：$y=-k\left\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}(1+e)\right\}^2+e^2h$

C_2：$y=-k\left\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}(1+2e+e^2)\right\}^2+e^4h$

C_3：$y=-k\left\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}(1+2e+2e^2+e^3)\right\}^2+e^6h$

C_4：$y=-k\left\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}(1+2e+2e^2+2e^3+e^4)\right\}^2+e^8h$

⋮

条件３より、頂点のy座標は$e^{2n}h$の形で表される。

赤線部分に注目すると、赤線部分は初項0、$e^{n-1}+e^n$を階差数列とする数列である。

赤線部分の数列の一般項をa_nとする。
（便宜上、$n=1,2,3,\ldots$と仮定する。）

$$\therefore n\geq 2\text{のとき、}a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(e^{k-1}+e^k)$$
$$=0+(1+e)\sum_{k=1}^{n-1}e^{k-1}$$
$$=0+(1+e)*\frac{1*(1-e^{n-1})}{1-e}$$
$$=\frac{(e+1)(1-e^{n-1})}{1-e}$$

これは、$n=1$のときも成り立つ。
【$n=1$のとき、$a_1=0$】
ここで、$n=0,1,2,\ldots$より、右辺のnを$n+1$で置き換えると、

$$a_n=\frac{(e+1)(1-e^n)}{1-e}$$

- $a_n=\frac{(e+1)(1-e^n)}{1-e}$と、条件５（$y\geq 0,x\geq 0$）より、

n回目のバウンドの軌道は

$$y=-k\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}*a_n\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

⇓

$$y=-k\{x-\sqrt{\frac{h}{k}}\frac{(e+1)(1-e^n)}{1-e}\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

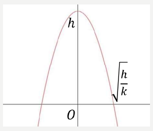
＜導出２＞

＜kをvとgで表す＞

- 方針：
  1. 条件３より速度は一定なので速度は初速度のみを考える。
  2. y軸について自由落下を考え、x軸について等速直線運動を考える。
  3. 重力加速度gや初速度vを用いてkを導出する。

C_0において、$y=-kx^2+h$
なので、

$y=0$のとき、$x=\sqrt{\frac{h}{k}}(x>0)$
$\cdots\cdot$①



---

t秒後にボールが地面に着地したとする。

水平方向について、飛んだ距離xは

$x=vt$ $\cdots\cdot$②

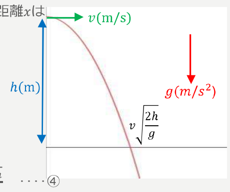
鉛直下向きについて、

$h=\frac{1}{2}gt^2$ $\cdots\cdot$③

が成り立つ。

③より、$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

tを②に代入して、$x=v\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\cdots\cdot$④



---

① （$x=\sqrt{\frac{h}{k}}$） と ④ （$x=v\sqrt{\frac{2h}{g}}$） より、

$\sqrt{\frac{h}{k}}=v\sqrt{\frac{2h}{g}}$ kについて解くと、

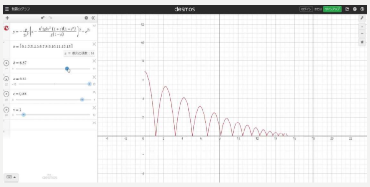
$$\therefore k=\frac{g}{2v^2}$$

➡ C_nの式のkを$\frac{g}{2v^2}$で置き換えると、

$$y=-\frac{g}{2v^2}\{x-\frac{\sqrt{2gv^2h}(e+1)(1-e^n)}{g(1-e)}\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

$$y=-\frac{g}{2v^2}\left\{x-\frac{\sqrt{2ghv^2}(e+1)(1-e^n)}{g(1-e)}\right\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

（ここではeはネイピア数として認識されてしまうので、eをcに置き換えて表しています。）



まとめ・展望

- ボールのバウンドの軌道は、x軸方向の速度が一定の場合、

$$y=-\frac{g}{2v^2}\{x-\frac{\sqrt{2gv^2h}(e+1)(1-e^n)}{g(1-e)}\}^2+e^{2n}h\ \{x\geq 0\}\{y\geq 0\}$$

で表されることが分かった。
- これからの研究では、空気抵抗による減速なども考慮した関数についても研究していきたい。
- また、それぞれの放物線の頂点を通る関数についても研究していきたい。

参考文献

- ボールのバウンドの数理 明治大学
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/labo/report/open/2013-joukou.pdf

- Wikipedia 反発係数
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8D%E7%99%BA%E4%BF%82%E6%95%B0